

**NEUARTIGE VERFAHREN ZUR SYNTHESE
VON RC-GYRATOR-ZWEITOREN BEI GEGEBENER
ÜBERTRAGUNGSFUNKTION**

von
Albert Mayer

Erlangen 1973

1973 № 425



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548408_0017

NEUARTIGE VERFAHREN ZUR SYNTHESE VON RC-GYRATOR-ZWEITOREN BEI GEGEBENER ÜBERTRAGUNGSFUNKTION

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt

von

Albert Mayer

Erlangen 1973



Als Dissertation genehmigt von der

Technischen Fakultät

der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 15.5.1973

Tag der Promotion: 12.9.1973

Dekan: Prof.Dr.phil.nat.H.Schlitt

Berichterstatter: Prof.Dr.-Ing.R.Unbehauen

Prof.Dr.-Ing.W.Schüßler

INHALT

Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen	4
EINFÜHRUNG	6
Teil I: NETZWERKTHEORETISCHE GRUNDLAGEN	8
1. Die Fialkow-Gerst-Bedingungen für kopplungsfreie Dreipole	8
2. Bedingungen und Verfahren zur Realisierung zweier Admittanzmatrix- oder Impedanzmatrix- Elemente durch Übertragerfreie RC-Zweitore	9
2.1. Allgemeines	9
2.2. Das Fialkow-Gerst-Verfahren	11
2.3. Das Realisierungsverfahren von E.A. Guillemin	11
2.4. Realisierungen durch Abzweignetzwerke	11
2.5. Das Dasher-Verfahren	12
3. RC-RL-Zerlegung einer rationalen Funktion	13
3.1. Zerlegung bei komplexen Nullstellen	13
3.2. Zerlegung bei reellen und komplexen Nullstellen	21
4. Der Gyrator	25
4.1. Die Beschreibung des Gyrtors durch seine Admittanzmatrix	25
4.2. Die Güte des Gyrtors	27
Teil II: REALISIERUNG VON ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN DURCH EINE KETTEN-PARALLEL-STRUKTUR AUS ZWEI RC-ZWEI- TOREN UND EINEM GYRATOR	29
1. Die Netzwerkstruktur, Analyse	29
2. Die Synthese von Übertragungsfunktionen mit reellen und komplexen Polen	30
2.1. Die Zerlegung des Nenners der vorge- schriebenen Übertragungsfunktion	31
2.2. Die Zerlegung des Zählers der vorge- schriebenen Übertragungsfunktion	33

2.3.	Zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Matrixelemente der beiden RC-Zweitore	34
2.4.	Vereinfachte Darstellung für Übertra- gungsfunktionen ohne Pole und Null- stellen auf der negativ reellen p-Achse	42
2.5.	Verwendung von nicht-idealen Gyratoren mit endlicher Güte	46
2.6.	Zwei Beispiele	52
3.	Realisierung einer beliebigen Übertragungs- funktion zweiten Grades mit einem nicht- idealen Gyrtator	61
3.1.	Vorbemerkung	61
3.2.	Die Bestimmung der Admittanzmatrix- Elemente der RC-Zweitore	62
3.2.1.	Übertragungsfunktionen ohne Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse	62
3.2.2.	Übertragungsfunktionen mit negativ reellen Übertragungsnullstellen	66
3.3.	Optimierung der Übertragungskonstante bei gleichzeitiger Berücksichtigung endlicher Gyrtorgüte	68
3.3.1.	Übertragungsfunktionen ohne negativ reelle Nullstellen	68
3.3.2.	Übertragungsfunktionen mit Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse	73
3.4.	Berechnung der Pol- und Nullstellen- empfindlichkeiten bezüglich der Parameter des Gyrtators	79
3.4.1.	Nullstellenempfindlichkeit eines Polynoms	79
3.4.2.	Die Empfindlichkeit der Pole der Übertragungsfunktion	81
3.4.3.	Die Empfindlichkeit der Nullstellen der Übertragungsfunktion	83
3.5.	Ein Beispiel zur Realisierung einer Übertragungsfunktion zweiten Grades	86

Teil III: REALISIERUNG VON ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN DURCH EINE GYRATOR-RC-KETTENSTRUKTUR	89
1. Vorbemerkungen, Analyse der Netzwerkstruktur	89
2. Synthese einer Übertragungsfunktion beliebigen Grades mit reellen und komplexen Polen	90
2.1. Umformung der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion und Bestimmung der Matrixelemente der RC-Zweitore	91
2.2. Verlustberücksichtigung bei Verwendung nicht-idealer Gyratoren	94
3. Realisierung einer Übertragungsfunktion zweiten Grades mit einem nicht-idealen Gyrator	96
3.1. Vorbemerkung	96
3.2. Bestimmung der Matrixelemente der RC-Zweitore	96
3.2.1. Übertragungsfunktionen mit einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar	96
3.2.2. Übertragungsfunktionen mit reellen Nullstellen	97
3.3. Optimierung der Übertragungskonstante bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Gyratorverluste	98
3.3.1. Übertragungsfunktionen mit einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar	98
3.3.2. Übertragungsfunktionen mit nicht-positiv reellen Nullstellen	109
3.4. Die Empfindlichkeit der Übertragungspole bezüglich der Parameter des Gyrators	127
3.5. Zwei Beispiele zur Realisierung von Übertragungsfunktionen zweiten Grades	130
SCHLUSSBEMERKUNGEN	138
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	140
ANHANG A	141
ANHANG B	144

Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen

$p = \sigma + j\omega$	komplexer Frequenzparameter
Re ...	Realteil von
Im ...	Imaginärteil von
$H(p)$	Übertragungsfunktion
$P_1(p)$	Zählerpolynom der Übertragungsfunktion
$\tilde{P}_1(p)$	$P_1(p)/K$
a_μ	Koeffizienten von $P_1(p)$
$-x_1, -x_2$	reelle Nullstellen von $P_1(p)$
$P_2(p)$	Polynom, Nennerpolynom der Übertragungsfunktion
b_μ	Koeffizienten von $P_2(p)$
p_μ	komplexe Nullstellen von $P_2(p)$
$-\zeta_\nu$	reelle Nullstellen von $P_2(p)$
$Q(p)$	Hilfspolynom
$-\xi_\nu$	Nullstellen von $Q(p)$
$Z_{RL}(p), Z_2(p)$	$\left. \begin{array}{l} \text{RL-Impedanz} \\ \text{RC-Impedanz} \end{array} \right\} \text{ Summanden der RC-RL-Zerlegung}$
$Z_{RC}(p), Z_1(p)$	
$U(p), Q_1(p)$	$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{ Polynome, Summanden der Calahanschen Zerlegung}$
$V(p), Q_2(p)$	
$-\alpha_1, -\beta_1$	Nullstellen von $U(p)$ bzw. $V(p)$
A_0, B_0	bei der Calahanschen Zerlegung auftretende Konstanten
A'_0, A''_0, B'_0, B''_0	Konstanten
$Z_1(p), Z_2(p)$	reelle, rationale Funktionen
$Z_0(p), Z(p)$	Erweiterungsfunktionen, RC-Impedanzen
$\tau_\nu, \lambda_\nu, \xi_\nu, \xi_\nu$	Entwicklungskoeffizienten
U_1, U_2	Eingangs- bzw. Ausgangsspannung eines Zweitorts
$\underline{Y}, \underline{Y}$	Admittanzmatrix eines Zweitorts

$\underline{Z}, \underline{z}$	Impedanzmatrix eines Zweitorts
$z_{\mu\nu}, y_{\mu\nu}$	Matrixelemente
$g_{\mu\nu}$	Admittanzmatrix-Elemente des Gyrtors
ε_0	positiver, konstanter Faktor
$Q_v^{(\mu)}(p)$	Faktorpolynom des Hilfspolynoms $Q(p)$
$S_1(p), S_2(p)$	Zählerpolynome von Übertragungsimpedanzen bzw. Übertragungsadmittanzen
$T_1(p), T_2(p)$	Zählerpolynome von RC-, RL-Impedanzen
K, K_1, K_2	Übertragungskonstanten
$\delta [P_\mu]$	Grad des Polynoms $P_\mu(p)$
Q_G	Gyrtorgüte
Q_P	Polgüte
$-\psi$	Winkel des fiktiven Poles p_f
$\mathcal{L}_v$	Gebiete in einer Ebene
$\overline{\mathcal{L}}_v$	Komplementärgebiete
K_{Mv}	Schranken für die Übertragungskonstanten von RC-Zweitoren
$S_g^{p_1}$	Empfindlichkeit der Nullstellen p_1 eines Polynoms bezüglich Änderungen von g
$\tilde{v}, \tilde{g}_{\mu\nu}$	veränderliche Parameter bei der Empfindlichkeits- berechnung
ε	

Einführung

In einer im Jahre 1957 erschienenen Arbeit [1] stellte I.M. Horowitz ein neuartiges Konzept zur Realisierung von Übertragungsfunktionen vor, welches dadurch charakterisiert wird, daß ein RL-Zweitor (nur aus Ohmwiderständen und Induktivitäten bestehend) und ein RC-Zweitor (nur aus Ohmwiderständen und Kapazitäten bestehend) in Kette geschaltet sind. Das RL-Zweitor wurde durch einen einstufigen Transistorverstärker und ein RC-Zweitor realisiert. In einer späteren Veröffentlichung [2] vervollständigte Horowitz das Verfahren für die gewählte spezielle Übertragungsfunktion zweiten Grades durch ausführliche Angaben zur Optimierung der Polempfindlichkeit und der Grunddämpfung. N. Balabanian [3] setzte die Untersuchungen in der Richtung fort, daß er allgemeine Übertragungsfunktionen zuließ und das bei der Synthese benötigte Hilfspolynom in der von D.A. Calahan [4] angegebenen Weise optimal zu wählen versuchte. Hierdurch konnte er in vielen Fällen eine minimale Polempfindlichkeit gegenüber der Änderung eines aktiven Parameters erreichen. Schließlich griff W.G. Howard [5] wieder die von Horowitz behandelte Übertragungsfunktion auf, verwendete jedoch zur Erzeugung des benötigten RL-Zweitores einen verlustbehafteten Gyrator. Unter Verzicht auf irgendwelche Untersuchungen bezüglich der sinnvollen Bemessung freier Parameter leitete er Bedingungen für die Lage der Übertragungspole her, welche die Realisierbarkeit bei gegebenen Gyratordaten gewährleisten.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Überlegungen weitergeführt bzw. teilweise neu formuliert. Der erste Teil umfaßt einige wichtige Sätze aus der Netzwerksynthese [6] und das Verfahren zur (optimalen) Zerlegung einer bestimmten rationalen Funktion in die Summe einer RC- und einer RL-Impedanz. Im zweiten Teil bildet eine von W.H. Holmes [7] vorgeschlagene Ketten-Parallel-Struktur aus zwei RC-Zweitoren und einem (aktiven) Gyrator die Grundlage für die Entwicklung eines Syntheseverfahrens. Diese Netzwerke sind in der Lage, auch Übertragungsnullstellen in der rechten p-Halbebene ohne zusätzliche Erweiterung zu realisieren [6]. Für Übertragungsfunktionen zweiten Grades werden bei Verwendung nichtidealer

(aktiver) Gyratoren genaue Realisierbarkeitsbedingungen genannt. Vorschläge zur Optimierung der Empfindlichkeit und der Grunddämpfung erleichtern den Entwurf und nützen bestehende Freiheitsgrade in wünschenswerter Form aus.

Der dritte Teil der Arbeit beschäftigt sich noch einmal mit den Horowitzschen Gyrator-RC-Kettenstrukturen und insbesondere mit Funktionen zweiten Grades, auf die gewöhnlich bei praktischen Anwendungen auch höhergradige Übertragungsfunktionen durch Faktorisierung reduziert werden. Die Grunddämpfung dieser Kettenstrukturen ist in vielen Fällen sehr hoch. Eine genauere Untersuchung liefert untere Schranken für diese in Abhängigkeit von den Parametern der Übertragungsfunktion und den Daten des Gyratoren, so daß schnell über die Brauchbarkeit des Verfahrens entschieden werden kann. In vielen Fällen können Vorschriften zur Optimierung angegeben werden.

Die beiden behandelten Verfahren reichen theoretisch aus, jede beliebige Übertragungsfunktion zu verwirklichen, wenn eventuell noch eine Faktorisierung der Funktion vorgenommen wird. Die erreichbaren Polempfindlichkeiten schließen jedoch Realisierungen von hohen Polgüten für die Praxis aus. Hier bieten sich andere Möglichkeiten an: Simuliert man Induktivitäten durch Kapazitäten und Gyratoren, so bedeutet dies ein einfaches Prinzip, um mit Hilfe bekannter RLC-Syntheseverfahren Übertragungsfunktionen induktivitätsfrei zu realisieren. Werden von den Netzwerken nur selektive Eigenschaften gefordert, so eignen sich besonders die LC-Abzweignetzwerke. Die Realisierung allgemeiner Übertragungsfunktionen kann z.B. nach dem Verfahren von E.C. Ho erfolgen [6], [8]. Der Vorteil dieser Netzwerke besteht in ihrer geringen Empfindlichkeit gegenüber Schwan-
kungen der Elementewerte [9]. Zur Zeit sind bereits integrierte Gyratoren im Handel, die auch eine Simulation von Induktivitäten mit fließendem Potential gestatten. Auf die zuletzt genannten Anwendungsmöglichkeiten von Gyratoren wird jedoch im folgenden nicht näher eingegangen.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und viele weiterführende Vorschläge erhielt der Verfasser von Herrn Prof.Dr.Ing. R. Unbehauen, dem er an dieser Stelle hierfür herzlich dankt.

I. Netzwerktheoretische Grundlagen

1. Die Fialkow-Gerst-Bedingungen für kopplungsfreie Dreipole

Ein kopplungsfreier Dreipol werde in der im Bild 1 gezeigten Form zu einem Zweitor mit durchgehender Kurzschlußverbindung erweitert.

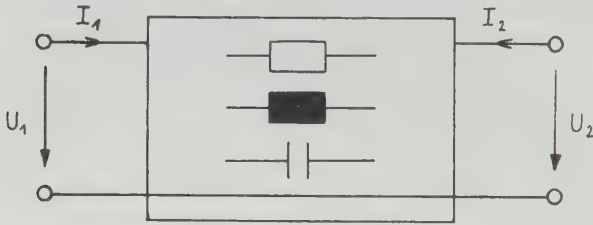


Bild 1: Kopplungsfreies Zweitor mit durchgehender Kurzschlußverbindung

Unter der Voraussetzung, daß die Admittanzmatrix dieses Zweitors existiert und ihre Elemente durch die Beziehungen

$$Y_{11} = \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{\Delta(p)} \quad , \quad (1a)$$

$$Y_{22} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_n p^n}{\Delta(p)} \quad , \quad (1b)$$

$$-Y_{12} = \frac{c_0 + c_1 p + \dots + c_n p^n}{\Delta(p)} \quad (1c)$$

dargestellt werden, müssen folgende Bedingungen zwischen den Koeffizienten notwendig erfüllt sein [6] :

$$\left. \begin{aligned} c_{\mu} &\geq 0 \\ a_{\mu} &\geq c_{\mu} \\ b_{\mu} &\geq c_{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (\mu = 0, 1, \dots, n) \quad \begin{aligned} (2a) \\ (2b) \\ (2c) \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta(p)$ die Systemdeterminante mit nicht-negativen Koeffizienten; die Zählerpolynome in den Gln. (1a, b, c) und das Nennerpolynom $\Delta(p)$ können einen gemeinsamen Polynomfaktor enthalten.

Dieselben Bedingungen gelten sinngemäß für die Impedanzmatrix-Elemente $Z_{\mu\nu}(p)$.

2. Bedingungen und Verfahren zur Realisierung zweier Admittanzmatrix- oder Impedanzmatrix-Elemente durch Übertragerfreie RC-Zweitore

2.1. Allgemeines

Bei der Synthese aktiver RC-Netzwerke tritt häufig das Problem auf, zwei Admittanzmatrix-Elemente $Y_{12}(p)$ und $Y_{11}(p)$ bzw. $Y_{22}(p)$ oder zwei entsprechende Impedanzmatrix-Elemente durch ein RC-Zweitore zu verwirklichen. Die Anwendung der in den Abschnitten 2.2 und 2.3 genannten Verfahren ist auf die Teilrealisierung von Admittanzmatrizen beschränkt, während durch die Verfahren der Abschnitte 2.4 und 2.5 beide Arten von Matrixelementen gleichermaßen verwirklicht werden können [6] .

Allen Verfahren gemeinsam ist die Voraussetzung, daß das vorgeschriebene Paar von Matrixelementen durch ein RCÜ-Zweitore realisierbar sein muß [6] , also die dafür notwendigen Bedingungen erfüllt. Weiterhin müssen natürlich die in Abschnitt 1 zusammengefaßten notwendigen Bedingungen für Übertragerfreie Zweitore eingehalten werden.

Die gewonnenen Netzwerke sind in der Regel nicht kanonisch.

Läßt man bei der Verwirklichung von Zweitormatrizen neben Ohmwidern und Kapazitäten noch ideale Übertrager zu, so können die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit von Impedanz- und Admittanzmatrizen durch solche Zweitore angegeben werden.

Die Impedanzmatrix-Elemente eines RCÜ-Zweiters müssen in der Form

$$Z_{11}(p) = E_{11}^{(\infty)} + \frac{E_{11}^{(0)}}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{E_{11}^{(\nu)}}{p + \sigma_{\nu}},$$

$$Z_{22}(p) = E_{22}^{(\infty)} + \frac{E_{22}^{(0)}}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{E_{22}^{(\nu)}}{p + \sigma_{\nu}}$$

und

$$Z_{12}(p) = E_{12}^{(\infty)} + \frac{E_{12}^{(0)}}{p} + \sum_{\nu=1}^n \frac{E_{12}^{(\nu)}}{p + \sigma_{\nu}}$$

darstellbar sein, wobei an die Entwicklungskoeffizienten die folgenden Anforderungen zu stellen sind:

$$E_{11}^{(\nu)} \geq 0, \quad E_{22}^{(\nu)} \geq 0$$

und

$$E_{11}^{(\nu)} E_{22}^{(\nu)} - [E_{12}^{(\nu)}]^2 \geq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n, \infty).$$

Es sei $\underline{Y}(p)$ die Admittanzmatrix eines RCÜ-Zweiters. Dann muß die durch den komplexen Frequenzparameter p dividierte Matrix $\underline{Y}(p)/p$ die oben angeschriebenen Bedingungen für Impedanzmatrizen erfüllen.

Sind nur zwei Matrixelemente, z.B. $Z_{11}(p)$ und $Z_{12}(p)$ vorgeschrieben, so ist in diesen Fällen die Realisierbarkeit gesichert, falls eine Ergänzung durch ein drittes Element [im Beispiel $Z_{22}(p)$] möglich ist, welches zusammen mit den gegebenen die obenstehenden Bedingungen einhält.

2.2. Das Fialkow-Gerst-Verfahren

Wie bereits erwähnt, können nur zwei Admittanzmatrix-Elemente verwirklicht werden. Die genannten notwendigen Bedingungen sind auch hinreichend. Das bedeutet, daß mit diesem Verfahren die größtmögliche Übertragungskonstante (positiver, konstanter Faktor bei $Y_{12}(p)$) realisiert werden kann. Läßt man Erweiterungen der Elemente durch gemeinsame Polynomfaktoren im Zähler und Nenner zu, so müssen lediglich positiv reelle Übertragungsnullstellen ausgeschlossen werden.

Der maximale Aufwand an Kapazitäten beträgt bei Funktionen n-ten Grades

$$2^n + \sum_{v=0}^{n-2} 2^v.$$

Wie man leicht erkennt, ist eine derartige Realisierung bei höherem Funktionsgrad sehr unwirtschaftlich.

2.3. Das Realisierungsverfahren von E.A. Guillemin

Die in Abschnitt 2.1 genannten notwendigen Bedingungen sind bei diesem Verfahren gewöhnlich nicht hinreichend. Die Realisierung der beiden Admittanzmatrix-Elemente kann nämlich im allgemeinen nur bis auf einen positiven konstanten Faktor $K < 1$ erfolgen, der in das Element $Y_{12}(p)$ eingeführt werden muß. Die Übertragungskonstante erreicht somit nicht ihren maximal möglichen Wert. Falls Zähler und Nenner der Matrixelemente einen gemeinsamen Polynomfaktor enthalten dürfen, müssen lediglich positiv reelle Übertragungsnullstellen ausgeschlossen werden. Die Netzwerke erfordern einen Aufwand von maximal n^2 Kapazitäten für Funktionen n-ten Grades, der sich jedoch durch eine einfache Modifikation auf etwa die Hälfte reduzieren läßt.

2.4. Realisierungen durch Abzweignetzwerke

Falls die endlichen Übertragungsnullstellen des gesuchten Zweitorts, d.h. die endlichen Nullstellen des Admittanzmatrix-Elements $Y_{12}(p)$ bzw. des Impedanzmatrix-Elements $Z_{12}(p)$ ausschließlich auf der negativ reellen Achse einschließlich $p = 0$ liegen und im übrigen die in Abschnitt 2.1 dargelegten Forderungen durch das gegebene

Paar von Matrixelementen befriedigt werden, kann eine Realisierung durch RC-Abzweignetzwerke gemäß Bild 2 erfolgen.

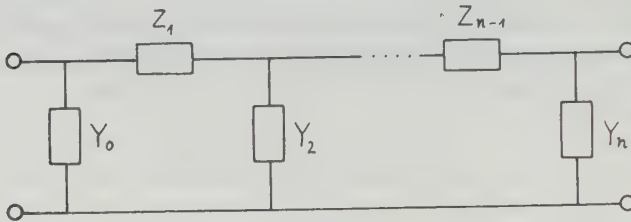


Bild 2: Zweitore in Abzweigschaltung

Der Aufwand an Netzwerkelementen ist meist geringer als bei den bisher beschriebenen Verfahren, es muß jedoch wieder ein zusätzlicher positiver, konstanter Faktor im Nebendiagonalelement zugelassen werden. Die Zweitore weisen ein günstiges praktisches Betriebsverhalten auf.

2.5. Das Dasher-Verfahren

Die nach B.J. Dasher bestimmten Netzwerke sind Kettenstrukturen und stellen eine Verallgemeinerung der im vorigen Abschnitt behandelten Abzweignetzwerke dar. Die Teilzweitore bestehen aus π -bzw. T-Gliedern, welche die reellen Übertragungsnullstellen erzeugen, und überbrückten T-Gliedern bzw. Doppel-T-Gliedern, die zur Realisierung komplexer Übertragungsnullstellen in der abgeschlossenen linken p-Halbebene benötigt werden.

Das Verfahren eignet sich sowohl zur Verwirklichung von Admittanzmatrix- als auch von Impedanzmatrix-Elementen, wobei im Nebendiagonalelement über die notwendigen Bedingungen hinaus ein positiver konstanter Faktor zugelassen werden muß. Die etwas umständlichen Rechenroutinen vereinfachen sich beträchtlich, wenn die Funktion $Y_{12}(p)$ bzw. $Z_{12}(p)$ neben beliebig vielen negativ reellen Nullstellen (einschließlich Nullpunkt) nur ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar besitzt [6].

3. RC-RL-Zerlegung einer rationalen Funktion

Bei den im zweiten und dritten Teil der Arbeit beschriebenen Realisierungsverfahren erfordert die Bestimmung der Matrixelemente der beiden RC-Zweitore eine Zerlegung des durch ein Hilfspolynom $Q(p)$ dividierten Nennerpolynoms $P_2(p)$ der Übertragungsfunktion in die Summe einer RC- und einer RL-Impedanz.

Es sei also das Polynom

$$P_2(p) = \prod_1^m (p - p_{\mu}) (p - p_{\mu}^*) \prod_1^n (p + \sigma_v) \quad (3)$$

vorgeschrieben. Führt man ein geeignetes Hilfspolynom

$$Q(p) = \prod_1^{n+m+1} (p + \sigma_1) \quad (1 = m, m - 1) \quad (4a)$$

mit

$$0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma_{n+m+1} \quad (4b)$$

ein, so kann man die rationale Funktion $P_2(p)/Q(p)$ unter bestimmten Voraussetzungen durch die Summe einer RC- und einer RL-Impedanz, also durch

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = Z_{RL}(p) + Z_{RC}(p) \quad (5)$$

darstellen.

3.1. Zerlegung bei komplexen Nullstellen

D.A. Calahan hat gezeigt [10], daß die RC-RL-Zerlegung eines nur konjugiert komplexe Nullstellenpaare besitzenden Polynoms $P_2(p)$ wenn überhaupt, dann immer in der Form

$$\begin{aligned} P_2(p) &= \prod_1^m (p - p_{\mu}) (p - p_{\mu}^*) \\ &= A_0 \prod_1^m (p + \alpha_1)^2 + g^2 B_0 \prod_1^1 (p + \beta_1)^2 \end{aligned} \quad (6a)$$

mit $1 = m - 1$ möglich sein muß.

Dabei gilt

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m (< \beta_m) , \quad (6b)$$

$$A_0 > 0, \quad B_0 > 0, \quad g^2 = 1.$$

Die gewünschten Impedanzen ergeben sich daraus durch Einführung des Hilfspolynoms

$$Q(p) = \prod_{i=1}^m (p + \alpha_i) \prod_{i=1}^1 (p + \beta_i) \quad (7)$$

als

$$Z_{RL}(p) = A_0 \frac{\prod_{i=1}^m (p + \alpha_i)}{\prod_{i=1}^1 (p + \beta_i)} , \quad Z_{RC}(p) = B_0 \frac{\prod_{i=1}^1 (p + \beta_i)}{\prod_{i=1}^m (p + \alpha_i)} . \quad (8a, b)$$

Damit muß notwendig die Bedingung

$$-\alpha_1 \leq 0 \quad (9)$$

gelten. Aus dieser Ungleichung folgen die Grenzen für die gewünschte Zerlegbarkeit des gegebenen Polynoms $P_2(p)$.

Zur Bestimmung der Parameter α_i und β_i hat Calahan für den Fall $l = m - 1$ ein einfaches Verfahren angegeben, das im folgenden dargelegt und auf die zusätzliche Möglichkeit $l = m$ erweitert wird.

Mit den Abkürzungen

$$U(p) = \sqrt{A_0} \prod_{i=1}^m (p + \alpha_i) \quad (10a)$$

und

$$V(p) = \sqrt{B_0} \prod_{i=1}^1 (p + \beta_i) \quad (10b)$$

lautet Gl. (6a) für $g^2 = 1$

$$\prod_{\mu=1}^m (p-p_{\mu})(p-p_{\mu}^*) = U^2(p) + V^2(p) \\ = [U(p) + j V(p)] [U(p) - j V(p)] . \quad (11)$$

Als Nennerpolynom der Übertragungsfunktion eines stabilen Netzwerks ist $P_2(p)$ notwendig ein Hurwitz-Polynom. Die Bezeichnungen seien nun so gewählt, daß alle Nullstellen p_{μ} im Innern des dritten Quadranten der p -Ebene liegen. Dann wird zunächst behauptet, daß die Nullstellen des ersten Faktors auf der rechten Seite von Gl. (11) im dritten Quadranten der p -Ebene liegen müssen, also mit den Stellen p_{μ} übereinstimmen. Dabei wird die Gültigkeit der Ungleichung (6b) vorausgesetzt. Es gilt nämlich

$$U(p) + j V(p) = V(p) \left[\frac{U(p)}{V(p)} + j \right] .$$

Da $U(p)/V(p)$ eine RL-Impedanz ist, muß ihr Realteil für $\text{Re } p > 0$ größer als Null sein. Damit sind Nullstellen der untersuchten Funktion in der offenen rechten p -Halbebene nicht möglich. Wie man weiterhin mit Hilfe der Partialbruchdarstellung einer RL-Impedanz leicht zeigen kann, ist auch der Imaginärteil von $Z_{RL}(p)$ immer nicht-negativ für nicht-negativen Imaginärteil der Variablen p , d.h.

$$\text{Im } Z_{RL}(p) \geq 0 \text{ für } \text{Im } p \geq 0 .$$

Die Funktion $U(p) + jV(p)$ kann somit auch im Innern des zweiten Quadranten der p -Ebene keine Nullstellen besitzen. Weiterhin ist die reelle p -Achse deshalb ausgeschlossen, weil entlang dieser Achse die Nullstellen von $U(p)$ und $V(p)$ alternieren. Damit wurde die Behauptung bewiesen.

Umgekehrt ist es natürlich wichtig zu wissen, unter welchen Bedingungen und wie aus den im dritten Quadranten liegenden Nullstellen von $P_2(p)$ die gewünschten Polynome $U(p)$ und $V(p)$ gewonnen werden können. Die Gl. (11) und die anschließenden Aussagen führen

zwangsläufig zu dem Ansatz

$$J \prod_1^m (p - p_\mu) = U(p) + j V(p) \quad (12a)$$

mit

$$J = e^{j\varphi} \quad (12b)$$

$$(0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}).$$

Setzt man reelle Werte von p voraus, so muß die linke Seite dieser Beziehung nach Ersetzen der komplexen Parameter p_μ und J durch die konjugiert komplexen Größen ebenfalls den konjugiert komplexen Funktionswert annehmen, so daß wie gefordert

$$J^* \prod (p - p_\mu^*) = U(p) - j V(p)$$

gilt. Da diese Gleichung für unendlich viele (reelle) p -Werte erfüllt ist, muß sie in der gesamten p -Ebene gelten. Unter welchen Bedingungen die Gl. (12a) zu Polynomen $U(p)$ und $V(p)$ führt, deren sämtliche Nullstellen einfach und reell sind und auf der reellen Achse alternieren, wird im folgenden mit Hilfe des Satzes vom logarithmischen Residuum [11, 6] gezeigt.

Wählt man den im Bild 3 dargestellten geschlossenen Weg $\mathcal{L}$ in der p -Ebene, so muß nach dem vollständigen Durchlaufen dieses Weges die Anzahl der Umläufe von

$$J \prod_1^m (p - p_\mu)$$

um den Nullpunkt gleich Null sein, da das eingeschlossene Gebiet einschließlich des Randes pol- und nullstellenfrei ist.

Wie man einer Grenzwertbetrachtung leicht entnimmt, umläuft die untersuchte Funktion den Nullpunkt jedoch $(m/2) - \text{mal}^1$, wenn die Variable p das halbkreisförmige Wegstück für $R \rightarrow \infty$ durchläuft. Damit muß jedoch die Anzahl der Umläufe auf dem zweiten Wegstück, also der reellen p -Achse von $\zeta = -\infty$ bis $\zeta = \infty$ gleich $-m/2$ sein. Der Realteil der Funktion

$$J \prod_1^m (p - p_\mu)$$

verschwindet daher auf dieser Strecke mindestens m -mal. Bei der

¹) Falls m ungerade ist, unterscheiden sich die Winkel der Kurvenendpunkte um π

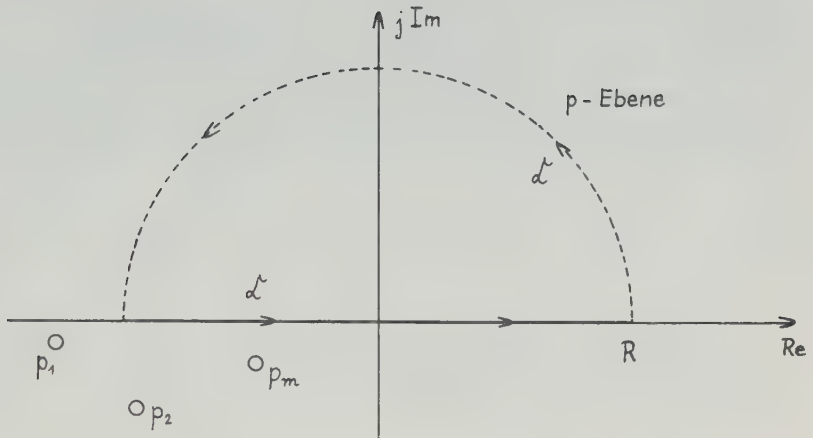


Bild 3: Weg α in der komplexen p -Ebene

Betrachtung des Imaginärteils müssen die Fälle $\mathcal{V} > 0$ und $\mathcal{V} = 0$ unterschieden werden. Für $\mathcal{V} > 0$ verschwindet der Imaginärteil der Funktion ebenfalls mindestens m -mal, für $\mathcal{V} = 0$ jedoch nur mindestens $(m - 1)$ -mal (dieser Unterschied kommt durch die verschiedenen "Startpunkte" der Funktion bei $\zeta = -\infty$ zustande). Da der Grad von $U(p)$ gleich m , der von $V(p)$ im Fall $\mathcal{V} > 0$ ebenfalls gleich m und im Fall $\mathcal{V} = 0$ gleich $m - 1$ beträgt, muß das Polynom $U(p)$ genau m und das Polynom $V(p)$ genau m bzw. $(m - 1)$ einfache reelle Nullstellen besitzen. Aufgrund vorstehender Ergebnisse müssen die Nullstellen der beiden Polynome alternieren. Wie man sich leicht überlegen kann, muß wegen $0 \leq \mathcal{V} < \frac{\pi}{2}$ die am weitesten rechts liegende eine Nullstelle des Realteils der Funktion und somit von $U(p)$ sein. Bild 4 zeigt den Funktionsverlauf in der komplexen $(U + jV)$ -Ebene für den einfachen Fall $m = 1$.

Zur Ermittlung der Realisierbarkeitsgrenze muß die Beziehung (9) zugrunde gelegt werden. Gemäß den Gln. (10a) und (12a, b) gilt

$$\operatorname{Re} e^{j\varphi} \prod_1^m (-p_\mu) = \sqrt{A_0} \prod_1^m \alpha_i. \quad (13)$$

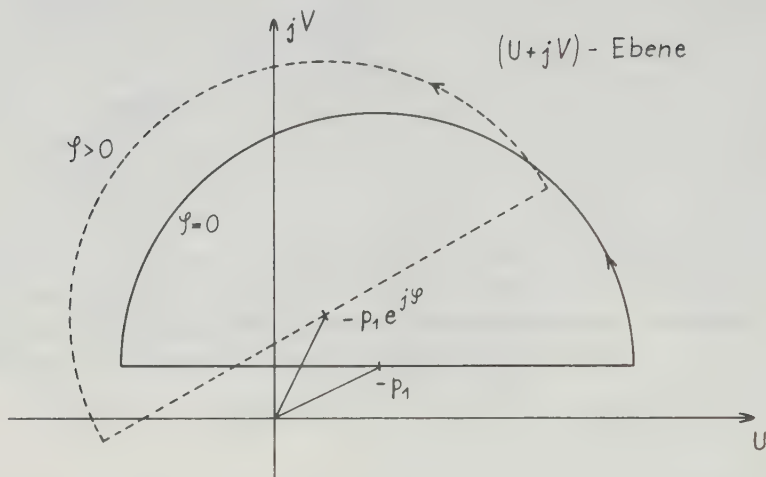


Bild 4: Funktionsverlauf von $U(p) + jV(p)$ auf dem geschlossenen Weg $\mathcal{L}$

Die Ungleichung (9) schließt notwendig die Gültigkeit der Beziehung

$$\prod_1^m \alpha_i \geq 0 \text{ mit ein. Aus dem Nullstellendiagramm der Funktion}$$

$\prod_1^m (p-p_\mu)$ ist folgendes zu ersehen (Bild 5): Sind alle Winkel $\arg(-p_\mu)$ sehr klein, so erfolgen die $(-m/2)$ Umläufe im wesentlichen, während p die negativ reelle p -Achse durchläuft, so daß mit $\varphi=0$ sämtliche Nullstellen von $U(p)$ und $V(p)$ negativ reell sein müssen.

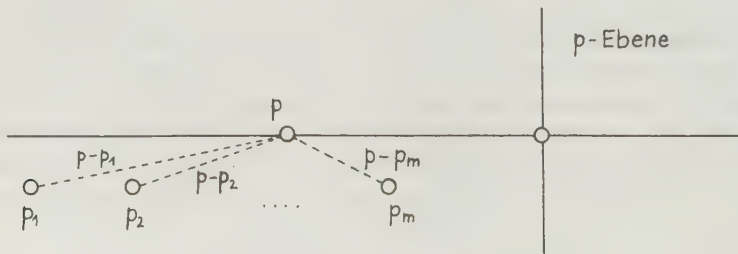


Bild 5: Nullstellendiagramm der Funktion $\prod_1^m (p-p_\mu)$

Läßt man die Summe der Winkel $\sum_1^m \arg(-p_\mu) + \mathcal{Y}$ kontinuierlich

größer werden und schließlich den Wert $\pi/2$ erreichen, so verschwindet die linke Seite von Gl. (13) und es wird $\alpha_1 = 0$. Wie weiterhin aus Gl. (13) entnommen werden kann, erhält man nun durch jede Vergrößerung der Winkelsumme eine Vergrößerung von $-\alpha_1$, was jedoch die Forderung (9) verletzt. Daraus folgt als notwendige Bedingung für die RC-RL-Zerlegung des Polynoms $P_2(p)$

$$\mathcal{Y} + \sum_1^m \arg(-p_\mu) \leq \frac{\pi}{2} . \quad (14)$$

Es kann nun noch gezeigt werden, daß die Zerlegungen gemäß den Gln. (6a) und (12a,b) für beliebige Werte des Winkels $\mathcal{Y}$, soweit dies die Ungleichung (14) zuläßt, denselben Betrag der Nullstellenempfindlichkeit gegenüber Änderungen des Parameters g aufweisen, der in der analysierten Übertragungsfunktion durch das aktive Element realisiert wird (siehe Teil II, Abschnitt 1). Schreibt man von Gl. (12a) ausgehend für variable g -Werte

$$e^{j\mathcal{Y}} \prod_1^m [p - (p_\mu + \Delta p_\mu)] = U(p) + j\tilde{g}V(p) ,$$

wobei $\tilde{g} = g + \Delta g$ sei, so gilt als Näherung erster Ordnung

$$e^{j\mathcal{Y}} \prod_{\mu=1}^m (\Delta p_\mu) \frac{\prod_1^m (p - p_\mu)}{p - p_\mu} = j \Delta g V(p)$$

und damit für $p = p_1$

$$e^{j\mathcal{Y}} \left[- \frac{\Delta p_1}{p_1} p_1 \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq 1}}^m (p_1 - p_\mu) \right] = j \frac{\Delta g}{g} g V(p_1) .$$

Die gesuchte Empfindlichkeit lautet hiermit

$$S_g^{p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial g} \cdot \frac{g}{p_i} = -j \frac{gV(p_i)}{e^{j\varphi} p_i \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^m (p_i - p_\mu)}$$

Die Größe $V(p_i)$ erhält man aus $U(p_i) + jgV(p_i) = 0$ und der Beziehung

$$e^{-j\varphi} \prod_{\mu=1}^m (p_i - p_\mu^*) = U(p_i) - jgV(p_i)$$

als

$$V(p_i) = j/(2g) e^{j\varphi} \prod_{\mu=1}^m (p_i - p_\mu^*) .$$

Damit gilt schließlich

$$S_g^{p_i} = 0,5 \frac{e^{-j2\varphi} \prod_{\mu=1}^m (p_i - p_\mu^*)}{p_i \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^m (p_i - p_\mu)} \quad (15)$$

Die Empfindlichkeit der Nullstellen von $P_2(p)$ bezüglich Änderungen des Parameters g ist also für alle obigen Zerlegungen (beliebige zulässige Winkel φ) betragsgleich und, wie Calahan in [4] gezeigt hat, auch minimal. Demnach besitzt jede RC-RL-Zerlegung, die nicht in der Form Gl. (5a) darstellbar ist, einen größeren Betrag der Nullstellenempfindlichkeit.

Beispiel 1 [4]

Das Polynom

$$P_2(p) = (p^2 + 2p + 2)(p^2 + \sqrt{3}p + 1)$$

soll nach obiger Methode zerlegt werden.

Man erhält

$$\begin{aligned} (p - p_1)(p - p_2) &= (p + 1 + j)(p + 0,866025 + j 0,5) \\ &= U(p) + jV(p), \end{aligned}$$

und daraus folgt:

1. Lösung: $\varphi \doteq 0$

$$U(p) = (p + 0,222740) (p + 1,643285),$$

$$V(p) = 1,5 (p + 0,910683).$$

2. Lösung: $\varphi = 9,279176^\circ$

$$U(p) = 0,986914 (p + 0,0935162) (p + 1,52743),$$

$$V(p) = 0,161245 (p + 0,856374) (p + 10,19053).$$

Wegen $\arg(-p_1) = 45^\circ$ und $\arg(-p_2) = 30^\circ$

ist der Winkel φ beschränkt auf

$$\varphi \leq 15^\circ.$$

Nach Gl. (15) folgt für die Empfindlichkeit der Zerlegungen:

$$\frac{p_1}{g^2} = e^{-j2\varphi} (0,591506 + j 0,841506),$$

$$\left| \frac{p_1}{g^2} \right| = 1,028597$$

und

$$\frac{p_2}{g^2} = e^{-j2\varphi} (-0,558013 - j 0,466506),$$

$$\left| \frac{p_2}{g^2} \right| = 0,727328.$$

3.2. Zerlegung bei reellen und komplexen Nullstellen

Für ein Polynom $P_2(p)$, das außer komplexen noch beliebige negativ reelle Nullstellen besitzt, wird im folgenden beschrieben, wie ein Hilfspolynom $Q(p)$ derart bestimmt werden kann, daß auch in diesem Fall die Funktion $P_2(p)/Q(p)$ in die Summe einer RC- und einer RL-Impedanz zerlegbar ist.

Das gegebene Polynom laute also

$$P_2(p) = \prod_1^n (p + \varrho_\nu) \prod_1^m (p - p_\mu)(p - p_\mu^*). \quad (16)$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite von Gl. (16) wird nun nach Abschnitt 3.1 zerlegt. Die dabei entstehenden Stellen $-\alpha_i$ und $-\beta_i$ bilden einen Teil der Nullstellen von $Q(p)$. Die noch verbleibenden unbekannten Nullstellen des Hilfspolynoms $Q(p)$ werden mit $-\gamma_\nu$ bezeichnet. Für die Größen γ_ν werden nur positive Werte zugelassen. Dann gilt gemäß den Gln. (5) und (8)

$$\begin{aligned} \frac{P_2(p)}{Q(p)} = & A_0 \frac{\prod_1^n (p + \varrho_\nu)}{\prod_1^n (p + \gamma_\nu)} \cdot \frac{\prod_1^m (p + \alpha_i)}{\prod_1^l (p + \beta_i)} \\ & + B_0 \frac{\prod_1^n (p + \varrho_\nu)}{\prod_1^n (p + \gamma_\nu)} \cdot \frac{\prod_1^l (p + \beta_i)}{\prod_1^m (p + \alpha_i)} \end{aligned} \quad (17)$$

$$(l = m, m - 1).$$

Bezeichnet man den ersten Summanden auf der rechten Seite von Gl. (17) mit $\tilde{Z}_2(p)$, den zweiten Summanden mit $\tilde{Z}_1(p)$ und setzt man

$$\sum_1^m \arg(-p_\mu) < \pi/2$$

voraus, so läßt sich gemäß Gl. (13) und den daran anschließenden Ausführungen erreichen, daß $\tilde{Z}_2(0) > 0$ wird. Die Funktionen $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ sind in der Regel keine RC- oder RL-Impedanzen.

Im weiteren muß ausgeschlossen werden, daß zufällig für irgendwelche ν und i die Beziehungen $\varrho_\nu = \alpha_i$ oder $\varrho_\nu = \beta_i$ gelten. Dies

läßt sich durch geeignete Wahl des Winkels φ bei der Zerlegung des nur komplexe Nullstellen enthaltenden Faktors von $P_2(p)$ vermeiden. Die noch unbekannten Nullstellen $-\tau_\nu$ des Hilfspolynoms $Q(p)$ werden nun auf die negativ reelle Achse in die Nähe der Nullstellen $-\zeta_\nu$ von $P_2(p)$ gelegt, wobei diese Stellen selbst ausgeschlossen sind. Je kleiner der Abstand $|\tau_\nu - \zeta_\nu|$ ist, desto kleiner ist auch der Betrag der Entwicklungskoeffizienten von $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ in den Polen $-\tau_\nu$. Diese Pole sollen jedenfalls so angeordnet werden, daß die Strecke zwischen jedem Punkt $-\tau_\nu$ und dem entsprechenden Punkt $-\zeta_\nu$ durch keine der Stellen $-\alpha_i$ oder $-\beta_i$ unterbrochen wird.

Unter diesen Voraussetzungen kann über die Eigenschaften der Funktionen $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ folgendes ausgesagt werden. Die Entwicklungskoeffizienten von $\tilde{Z}_1(p)$ in den Polen $-\alpha_i$ sind positiv diejenigen von $\tilde{Z}_2(p)$ in den Polen $-\beta_i$ sind negativ²⁾. Die Entwicklungskoeffizienten von beiden Funktionen in einem Pol $-\tau_\nu$ besitzen offensichtlich das gleiche Vorzeichen. Die Pole $-\tau_\nu$ seien nun so geordnet, daß die Funktionen $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ in denjenigen für $\nu = 1, 2, \dots, r$ positive Entwicklungskoeffizienten und in denjenigen für $\nu = r + 1, \dots, n$ negative Entwicklungskoeffizienten haben. Die Entwicklungskoeffizienten von $\tilde{Z}_1(p)$ in $-\tau_\nu$ ($\nu = r + 1, \dots, n$) seien mit $-\tau_\nu$ (< 0) bezeichnet, diejenigen von $\tilde{Z}_2(p)$ in $-\tau_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$) mit τ_ν (> 0) bezeichnet. Schließlich sei noch erwähnt, daß die Ungleichungen $\tilde{Z}_1(0) > 0$ und $\tilde{Z}_2(0) > 0$ gelten.

2) Dies erkennt man leicht daran, daß z.B. $\tilde{Z}_1(p)$ als Produkt des Faktors $\prod(p+\zeta_\nu) / \prod(p+\tau_\nu)$ und einer RC-Impedanz dargestellt werden kann. Der Entwicklungskoeffizient von $\tilde{Z}_1(p)$ in einem Pol $-\alpha_k$ ergibt sich aufgrund dieser Tatsache als Produkt des Entwicklungskoeffizienten der RC-Impedanz im Pol $-\alpha_k$ und des genannten Faktors an der Stelle $p = -\alpha_k$, der dort wegen der Einschränkungen für τ_ν immer positiv sein muß. Ebenso läßt sich $\tilde{Z}_2(p)$ als Produkt desselben Faktors und einer RL-Impedanz darstellen.

Aufgrund obiger Betrachtungen läßt sich die rationale Funktion

$$Z(p) = \sum_{v=1}^n \frac{\tau_v}{p + \tau_v} \quad (18)$$

bilden, mit deren Hilfe die gesuchte Zerlegung von $P_2(p)/Q(p)$ endgültig ermittelt werden kann. Bildet man nämlich

$$Z_1(p) = \tilde{Z}_1(p) + \sum_{v=1}^n \frac{\tau_v}{p + \tau_v}, \quad (19)$$

so ist diese Funktion sicher eine RC-Impedanz, da die Entwicklungskoeffizienten in allen Polen positiv sind und $Z_1(\infty) \geq 0$ gilt. Weiterhin ist

$$Z_2(p) = \tilde{Z}_2(p) - \sum_{v=1}^n \frac{\tau_v}{p + \tau_v} \quad (20)$$

genau dann eine RL-Impedanz, wenn der Funktionswert im Nullpunkt nicht negativ ist. Dies muß jedoch wegen $Z_2(0) > 0$ bei der Wahl hinreichend kleiner Abstände $|\tau_v - \tau_\mu|$ ($v = 1, 2, \dots, n$) immer möglich sein, wie Gl. (20) für $p = 0$ zeigt. Aus den Gln. (19) und (20) folgt nach Gl. (17)

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = Z_1(p) + Z_2(p)$$

mit

$$Z_1(p) = B'_0 \frac{\prod_{i=1}^{l+r} (p + x_{1\mu})}{\prod_{v=1}^r (p + \tau_v) \prod_{i=1}^m (p + \alpha_i)} \quad (21a)$$

$$Z_2(p) = A'_0 \frac{\prod_{i=1}^{m+n-r} (p + x_{2\mu})}{\prod_{v=1}^n (p + \tau_v) \prod_{i=1}^l (p + \beta_i)} \quad (21b)$$

$$(0 \leq r \leq n).$$

Damit wurde die gewünschte Zerlegung von $P_2(p)/Q(p)$ in die Summe einer RC- und einer RL-Impedanz unter der Bedingung

$$\sum_1^m \arg(-p_\mu) < \frac{\pi}{2} \quad (22)$$

bewerkstelligt.

Besitzt das Polynom $P_2(p)$ ausschließlich reelle und mindestens eine mehrfache Nullstelle, so kann man bei der Zerlegung ähnlich vorgehen. Dies geht z.B. aus einer möglichen Darstellung

$$\tilde{Z}_2(p) = \frac{\prod_{\nu \neq *}(p + \zeta_\nu)}{\prod_{\nu \neq *}(p + \gamma_\nu)} \cdot \frac{p + \zeta_*}{p + \gamma_*} \quad (\gamma_* > \zeta_*)$$

sofort hervor. Der zweite Faktor auf der rechten Seite der Gleichung ist eine RC-Admittanz. Die Funktion $\tilde{Z}_1(p)$ verschwindet identisch. Die weitere Bearbeitung erfolgt in der oben gezeigten Weise.

4. Der Gyrator

Der ideale Gyrator wurde im Jahre 1948 von B.D.H. Tellegen [12] als einfachstes nicht-reziprokes Zweitor eingeführt. Er ist ähnlich wie der ideale Übertrager passiv und verlustlos und besitzt die charakteristische Eigenschaft, die eines der Tore abschließende Impedanz bis auf einen positiven konstanten Faktor zu invertieren und am anderen Tor als Eingangsimpedanz wiederzugeben.

4.1. Die Beschreibung des Gyrtors durch seine Admittanzmatrix

Die Admittanzmatrix des von Tellegen eingeführten idealen Gyrtors lautet

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g \\ -g & 0 \end{bmatrix}.$$

Wie einer einfachen Analyse entnommen werden kann, ist das dadurch beschriebene Zweitor verlustlos. Das Schaltungssymbol wird im Bild 6 dargestellt.

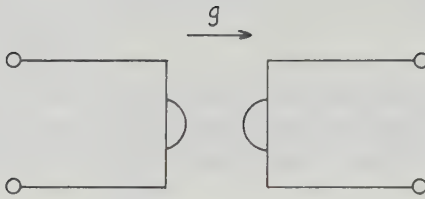


Bild 6: Schaltungssymbol für den idealen Gyrator

Verallgemeinerungen dieses Netzwerks führen zunächst zum "aktiven" Gyrator mit der Admittanzmatrix

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} \\ -g_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (23a)$$

und schließlich zum nicht-idealen Gyrator mit der Admittanzmatrix

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ -g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} . \quad (23b)$$

Zur Sicherstellung der Gyratoreigenschaften muß jedenfalls $g_{12}g_{21} > 0$ gelten, in der Regel ist $g_{11} \geq 0$ und $g_{22} \geq 0$.

Der aktive Gyrator, dessen Symbol im Bild 7a dargestellt ist, kann

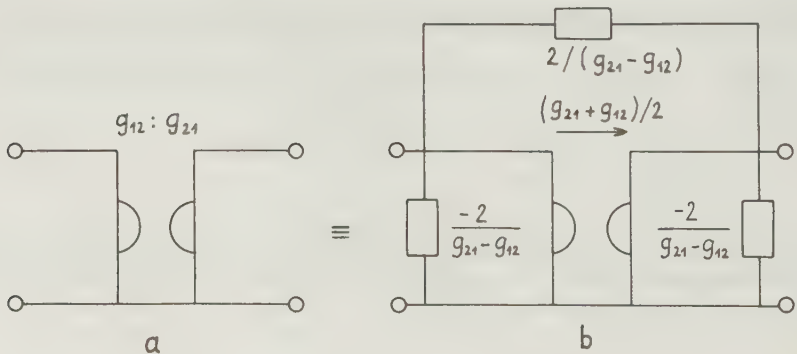


Bild 7: Schaltungssymbol und Ersatzschaltbild des aktiven Gyrtors

durch die Parallelschaltung eines aus Ohm Widerständen bestehenden π -Gliedes und eines idealen Gyrators gemäß Bild 7b ersetzt werden, wie aus der Aufspaltung der Admittanzmatrix Gl. (23a) in die Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix hervorgeht:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -(g_{21}-g_{12})/2 \\ -(g_{21}-g_{12})/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (g_{21}+g_{12})/2 \\ -(g_{21}+g_{12})/2 & 0 \end{bmatrix} . \quad (24)$$

4.2. Die Güte des Gyrators

Für den nicht-idealen Gyrator mit positiven Hauptdiagonalelementen der Admittanzmatrix gemäß Gl. (23b) kann eine Güte definiert werden. Das Maß soll durch die Güte des im Bild 8 gezeigten Netzwerks, das zu einem verlustbehafteten Schwingkreis gemäß Bild 9 äquivalent ist, gegeben sein [13] .

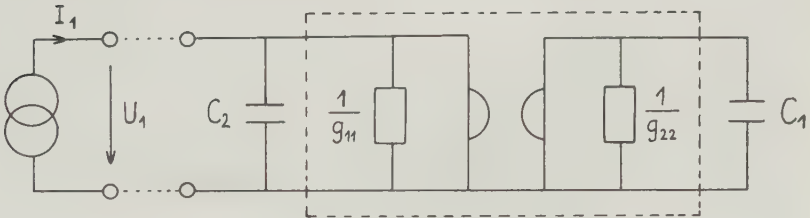


Bild 8: Netzwerk zur Definition der Güte eines Gyrators

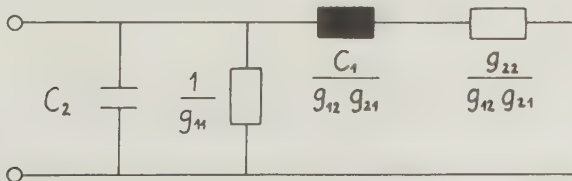


Bild 9: Schwingkreis, der zum Netzwerk im Bild 8 äquivalent ist

Eine Analyse des Netzwerks liefert die Impedanz

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{1}{C_2} \cdot \frac{p + \frac{g_{22}}{C_1}}{p^2 + \left[\frac{g_{11}}{C_2} + \frac{g_{22}}{C_1} \right] p + \frac{g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}}{C_1 C_2}} \quad (25)$$

Die Güte des Kreises ist unter der Voraussetzung komplexer Pole definiert als das Verhältnis des Betrags zum doppelten Realteil der Pole der Impedanz. Sie kann als Funktion der Kapazität C_2 betrachtet werden. Die maximale Güte in Abhängigkeit dieses Parameters wird als Gyratorgüte bezeichnet. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$Q_G = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}} \quad (26)$$

oder

$$4 Q_G^2 - 1 = \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}} \quad (27)$$

Man beachte, daß in manchen Fällen die Überbrückung eines nicht-idealen Gyrtors durch einen Ohmwidcrstand eine Verbesserung der Gyratorgüte zur Folge haben kann (Bild 10).

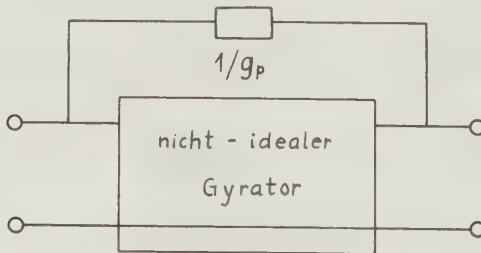


Bild 10: Durch einen Ohmwidcrstand überbrückter, nicht-idealer Gyrator

Die Güte des Gesamtnetzwerks wird dann nach Gl. (27)

$$4 Q_G^2 - 1 = \frac{(g_{12} - g_p)(g_{21} + g_p)}{(g_{11} + g_p)(g_{22} + g_p)} .$$

Ein sinnvolles relatives Maximum des rechts stehenden Ausdrucks in Abhängigkeit von g_p wird erreicht, wenn die Gleichung

$$\begin{aligned} g_p^2 (g_{11} + g_{22} + g_{12} - g_{21}) + 2g_p (g_{11}g_{22} + g_{12}g_{21}) - \\ - g_{11}g_{22} (g_{12} - g_{21}) + g_{12}g_{21} (g_{11} + g_{22}) = 0 \end{aligned}$$

eine positive Lösung für g_p besitzt.

II. Realisierung von Übertragungsfunktionen durch eine Ketten-Parallel-Struktur aus zwei RC-Zweitoren und einem Gyrator

1. Die Netzwerkstruktur, Analyse

Die im Bild 11 dargestellte Netzwerkstruktur zur Realisierung von Übertragungsfunktionen wurde von W.H. Holmes [7] vorgeschlagen und für einige einfache Funktionen im einzelnen verwirklicht (siehe auch [6]). Die folgenden Untersuchungen zeigen, daß mit dieser Netzwerkanordnung beliebige Übertragungsfunktionen zweiten Grades mit nicht-idealen Gyatoren und darüber hinaus Übertragungsfunktionen beliebigen Grades mit idealen (aktiven) Gyatoren realisiert werden können, wenn nur ihre Nennerpolynome eine RC-RL-Zerlegung zulassen, d.h. die komplexen Übertragungspole die Winkelbedingung Gl. (22) erfüllen.

Das Netzwerk besteht aus zwei RC-Zweitoren und einem Gyrator, von dem zunächst angenommen wird, daß er aktiv oder ideal ist und durch Gl. (23a) beschrieben werden kann. Für die Darstellung des folgenden Verfahrens ist es wichtig, durch Multiplikation der

Admittanzmatrix-Elemente des Gyrators mit einem positiven konstanten Faktor g_0 dessen Impedanzniveau beweglich zu machen.

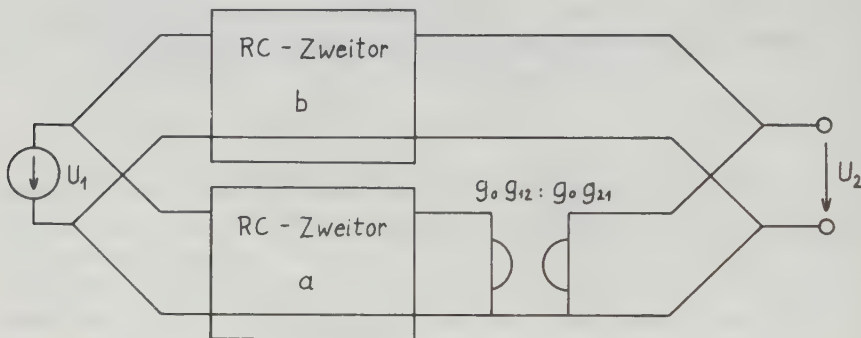


Bild 11: Die Netzwerkstruktur nach W.H. Holmes

Aus der Analyse des vollständigen Zweitors nach Bild 11 resultiert die Übertragungsfunktion

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = \frac{-g_0 g_{21} y_{12}^{(a)} / y_{22}^{(a)} - y_{12}^{(b)}}{g_0^2 g_{12} g_{21} / y_{22}^{(a)} + y_{22}^{(b)}} \quad (28)$$

Die Funktionen $y_{\mu\nu}^{(a)}(p)$ und $y_{\mu\nu}^{(b)}(p)$ sind dabei die Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore a und b.

2. Die Synthese von Übertragungsfunktionen mit reellen und komplexen Polen

Vorgeschrieben sei die rationale, reelle Funktion

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = K \frac{a_{2m+n} p^{2m+n} + \dots + a_0}{\prod_{i=1}^n (p + \varrho_i) \prod_{j=1}^m (p - p_{\mu}) (p - p_{\mu}^*)} \quad (29)$$

Der Koeffizient bei der höchsten auftretenden Potenz des Zählerpolynoms sei positiv. Weiterhin gelte zur Sicherstellung der RC-RL-Zerlegbarkeit von $P_2(p)$ die Winkelbedingung

$$\sum_1^m \arg(-p_\mu) < \pi/2.$$

Die Übertragungskonstante K kann nicht vorgeschrieben werden.

Im weiteren wird die gegebene Übertragungsfunktion Gl. (29) unter Einführung eines geeigneten Hilfspolynoms $Q(p)$ so umgestaltet, daß durch einen Vergleich mit der analysierten Übertragungsfunktion Gl. (28) eine Bestimmung der gesuchten Matricelemente $y_{22}^{(b)}(p)$, $y_{12}^{(b)}(p)$, $y_{22}^{(a)}(p)$ und $y_{12}^{(a)}(p)$ möglich ist.

2.1. Die Zerlegung des Nenners der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion

Der erste Schritt bei der Umformung der gegebenen Übertragungsfunktion ist die RC-RL-Zerlegung des durch ein Hilfspolynom dividierten Nennerpolynoms $P_2(p)$. Nach Teil I, Abschnitt 3.2 hat das Hilfspolynom die Form

$$\begin{aligned} Q(p) &= \underbrace{\prod_1^r (p + \gamma_\nu)}_{Q_1(p)} \underbrace{\prod_1^m (p + \alpha_i)}_{Q_2(p)} \underbrace{\prod_{r+1}^n (p + \gamma_\nu)}_{Q_1(p)} \underbrace{\prod_1^l (p + \beta_i)}_{Q_2(p)} \end{aligned} \quad (30)$$

mit

$$0 \leq r \leq n,$$

$$\alpha_1 > 0.$$

Dabei kann $l = m$ oder $l = m - 1$ sein, je nachdem wie die Zerlegung von $P_2(p)$ durchgeführt werden soll. Zur Vereinfachung der Darstellung werden noch neue Bezeichnungen eingeführt. Es sei

$$Q_1(p) = \prod_1^{m+r} (p + \sigma_v) \quad (31a)$$

und

$$Q_2(p) = \prod_{m+r+1}^{n+m+l} (p + \sigma_v). \quad (31b)$$

Damit erhält man gemäß den Gln. (21a,b) die folgende Darstellung für die Zerlegung der Nennerfunktion $P_2(p)/Q(p)$ in die Summe einer RC-Admittanz (diese besitzt dieselben Eigenschaften wie eine RL-Impedanz!) und einer RC-Impedanz

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = \underbrace{\vartheta_0^{(1)} + \sum_1^{m+r} \frac{\vartheta_v}{p + \sigma_v}}_{Z_1(p)} + \underbrace{\vartheta_\infty p + \vartheta_0^{(2)} + \sum_{m+r+1}^{n+m+l} \frac{\vartheta_v p}{p + \sigma_v}}_{Z_2(p)} \quad (32a)$$

$$= Z_1(p) + Z_2(p) \quad (32b)$$

$$= B'_0 \frac{D_1(p)}{Q_1(p)} + A'_0 \frac{D_2(p)}{Q_2(p)} \quad (32c)$$

mit

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_\infty > 0 \\ \vartheta_0^{(1)} = 0 \end{array} \right\} \text{ für } l = m-1, \quad \left. \begin{array}{l} \vartheta_\infty = 0 \\ \vartheta_0^{(1)} > 0 \end{array} \right\} \text{ für } l = m \quad (33)$$

$$\vartheta_v > 0, \quad \vartheta_0^{(2)} > 0.$$

Diese Zerlegung ist immer möglich, wenn die Winkelbedingungen Gl. (22) eingehalten werden. Vor einer weiteren Bearbeitung des Nenners muß nun zuerst die Zählerfunktion $P_1(p)/Q(p)$ zerlegt werden.

2.2. Die Zerlegung des Zählers der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion

Die Art der Zählerzerlegung bestimmt die Lage der Übertragungsnullstellen der beiden RC-Zweitore. Es gibt viele Möglichkeiten, von denen hier diejenige herausgegriffen wird, die in jedem Fall zu Übertragungsnullstellen auf der negativ-reellen Achse einschließlich $p = 0$ führt. Dadurch ergeben sich in der Regel Vorteile bei der Realisierung.

Zunächst wird der aus dem Zählerpolynom der Übertragungsfunktion und dem Hilfspolynom gebildete Quotient in Partialbrüche zerlegt

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left[\lambda_{\infty} p + \lambda_0 + \sum_1^{s_1} \frac{\lambda_v p}{p + \sigma_v} - \sum_{s_1+1}^{m+r} \frac{\lambda_v p}{p + \sigma_v} + \sum_{m+r+1}^{s_2} \frac{\lambda_v p}{p + \sigma_v} - \sum_{s_2+1}^{n+m+1} \frac{\lambda_v p}{p + \sigma_v} \right]. \quad (34)$$

Dabei ist

$$\lambda_{\infty} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } l = m - 1, \\ = 0 & \text{für } l = m, \end{cases}$$

$$\lambda_0 \geq 0,$$

und die Indizierung sei innerhalb der Grenzen $(1, \dots, m + r)$ und $(m + r + 1, \dots, n + m + 1)$ so gewählt, daß $\lambda_v > 0$ gilt.

Zur weiteren Vereinfachung der Darstellung werden noch folgende Abkürzungen eingeführt

$$Q_1^{(1)}(p) = \prod_1^{s_1} (p + \sigma_v) \quad ; \quad Q_1^{(2)}(p) = \prod_{s_1+1}^{m+r} (p + \sigma_v) \quad ; \quad (35a, b)$$

$$Q_2^{(1)}(p) = \prod_{m+r+1}^{s_2} (p + \sigma_r) ; \quad Q_2^{(2)}(p) = \prod_{s_2+1}^{n+m+l} (p + \sigma_r). \quad (35c,d)$$

Durch Zusammenfassung der Partialbrüche, deren Entwicklungskoeffizienten $+\lambda_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n+m+1, \infty$) gleiches Vorzeichen besitzen, gelangt man zur Darstellung

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2^{(1)}(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2^{(2)}(p)}. \quad (36)$$

Beide Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung sind aufgrund ihrer Bildungsweise RC-Admittanzen und besitzen daher nur einfache Nullstellen ausschließlich auf der nicht-positiv reellen p-Achse.

2.3. Zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Matrixelemente der beiden RC-Zweitore

Die vorgeschriebene Übertragungsfunktion erhält durch die Umformungen Gl. (32b) und (36) die Gestalt

$$\frac{\frac{P_1(p)}{Q(p)}}{\frac{P_2(p)}{Q(p)}} = \frac{\frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2^{(1)}(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2^{(2)}(p)}}{[Z_2(p) - Z_0(p)] + [Z_1(p) + Z_0(p)]} \quad (37)$$

Die im Nenner auftretende RC-Impedanz $Z_0(p)$ wurde noch nicht festgelegt. Es können bei der Identifikation der Gl. (37) mit Gl. (28) zwei Fälle unterschieden werden.

Erste Möglichkeit

Beim Vergleich der Zählerfunktionen der genannten Gleichungen identifiziert man

$$-y_{12}^{(b)}(p) = \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2^{(1)}(p)} \quad (38a)$$

$$\equiv K_2 \frac{S_2(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2^{(1)}(p)} \quad (K_2 = \text{const} > 0). \quad (38b)$$

Der Koeffizient bei der höchsten Potenz des durch Gl. (38b) definierten Polynoms $S_2(p)$ sei gleich Eins. Wie aus dem weiteren hervorgeht, erhält man aus dem Vergleich der Gln. (37) und (28) zulässige Paare von Admittanzmatrix-Elementen für die RC-Zweitore a und b, falls die RC-Impedanz $Z_0(p)$ durch die Beziehung

$$Z_0(p) = \sum_1^{s_1} \frac{\xi_v}{p + \tilde{\sigma}_v} + \sum_{s_2+1}^{n+m+l} \frac{\xi_v}{p + \tilde{\sigma}_v} \quad (39a)$$

$$= \eta_0 - \sum_1^{s_1} \frac{p \xi_v / \tilde{\sigma}_v}{p + \tilde{\sigma}_v} - \sum_{s_2+1}^{n+m+l} \frac{p \xi_v / \tilde{\sigma}_v}{p + \tilde{\sigma}_v} \quad (39b)$$

mit positiven ξ_v festgelegt wird. Die Parameter ξ_v unterliegen bestimmten Einschränkungen, auf die später eingegangen wird. Setzt man $Z_{RC}(p) = Z_1(p) + Z_0(p)$ und $Z_{RL}(p) = Z_2(p) - Z_0(p)$ und berücksichtigt die Gln. (32a,b) und (39a,b), so folgt

$$Z_{RC}(p) = \vartheta_0^{(1)} + \sum_1^{s_1} \frac{\vartheta_v + \xi_v}{p + \tilde{\sigma}_v} + \sum_{s_1+1}^{n+r} \frac{\vartheta_v}{p + \tilde{\sigma}_v} + \sum_{s_2+1}^{n+m+l} \frac{\xi_v}{p + \tilde{\sigma}_v} \quad (40)$$

$$\equiv \frac{B_0'' T_1(p)}{Q_1(p) Q_2^{(2)}(p)}$$

und

$$Z_{RL}(p) = \vartheta_{\infty} p + \vartheta_0^{(2)} - \eta_0 + \sum_1 \frac{p \xi_v / \zeta_v}{p + \zeta_v} + \sum_{m+r+1} \frac{\vartheta_v p}{p + \zeta_v} + \sum_{s_2+1}^{n+m+l} \frac{(\vartheta_v + \xi_v / \zeta_v) p}{p + \zeta_v} \quad (41)$$

$$\equiv \frac{A_0'' T_2(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2(p)} .$$

Alle auftretenden Entwicklungskoeffizienten sind positiv mit Ausnahme der Koeffizienten $\vartheta_0^{(1)}$ und ϑ_{∞} , über welche die Beziehungen (33) aussagen. Die Koeffizienten bei den höchsten Potenzen von $T_1(p)$ und $T_2(p)$ seien gleich Eins. Falls $\vartheta_0^{(2)} \geq \eta_0$ gilt, ist $Z_{RL}(p)$ eine RC-Admittanz. Dies läßt sich jedoch immer so einrichten, weil $\vartheta_0^{(2)} = Z_2(0) > 0$ gilt und durch Wahl hinreichend kleiner Entwicklungskoeffizienten $\xi_v > 0$ der Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ η_0 beliebig klein gemacht werden kann. Die Funktion $Z_{RC}(p)$ ist in jedem Fall eine RC-Impedanz.

Der Vergleich der Gln. (28) und (37) liefert nun die Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore. Durch Gleichsetzen der Nennerfunktionen bestimmt man mit den Gln. (40) und (41)

$$\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{\vartheta_0^2} = \frac{\xi_{12} \xi_{21} Q_1(p) Q_2^{(2)}(p)}{B_0'' T_1(p)} \quad (42)$$

und

$$y_{22}^{(b)}(p) = \frac{A_0'' T_2(p)}{Q_1^{(1)}(p) Q_2(p)} . \quad (43)$$

Durch Gleichsetzen der Zählerfunktionen ergibt sich mit Gl. (38a)

$$-\frac{g_0 g_{21} y_{12}^{(a)}(p)}{y_{22}^{(a)}(p)} = -\frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2^{(2)}(p)}$$

und daraus mit Gl. (42)

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_0^2} = -\frac{g_{12} P_1^{(2)}(p) Q_1^{(1)}(p)}{B'_0 g_0 T_1(p)} \quad (44a)$$

$$\equiv K_1 \frac{S_1(p)}{T_1(p)} \quad (K_1 = \text{const} > 0) . \quad (44b)$$

Der Koeffizient bei der höchsten Potenz des durch die obige Gleichung definierten Polynoms $S_1(p)$ sei gleich Eins.

Damit sind alle gesuchten Admittanzmatrix-Elemente bestimmt, wobei unabhängig von den Zerlegungen offensichtlich noch zwei Größen (in einem gewissen Rahmen) frei gewählt werden können, z.B. die Parameter g_0 und K .

Es ist noch zu prüfen, ob die jeweils zu einem RC-Zweitor gehörenden Admittanzmatrix-Elemente zulässige Paare bilden. Die Funktionen $y_{22}^{(a)}(p)$ und $y_{12}^{(a)}(p)$ besitzen, wie man aus den Gln. (42) und (44a) erkennt, dieselben endlichen Pole und es gilt $y_{22}^{(a)}(0) > 0$. Falls außerdem der Grad des Zählerpolynoms von $y_{12}^{(a)}(p)$ gleich oder kleiner ist als derjenige des Zählerpolynoms von $y_{22}^{(a)}(p)$, so sind alle Bedingungen für eine Realisierung durch ein RC-Zweitor erfüllt [6], d.h. es ist zu fordern mit den Gln. (34) und (36)

$$\delta [Q_1^{(2)}] + \delta [Q_2^{(2)}] + \delta [Q_1^{(1)}] \leq \delta [Q_1] + \delta [Q_2^{(2)}] .$$

Diese Ungleichung gilt jedoch offensichtlich mit dem Gleichheitszeichen.

Wie aus den Gln. (38a) und (43) hervorgeht, hat das Element $y_{22}^{(b)}(p)$ gegenüber $y_{12}^{(b)}(p)$ überzählige Pole im Endlichen, und zwar in den

Nullstellen von $Q_2^{(2)}(p)$. Diese können vorweg abgebaut werden. Im übrigen gilt gemäß den Gln. (43) und (41) $y_{22}^{(b)}(0) > 0$, und es muß lediglich noch die folgenden Gradbedingungen erfüllt sein

$$\delta [S_2] \leq \delta [T_2] - \delta [Q_2^{(2)}]$$

oder mit Gl. (41)

$$\delta [Q_1^{(1)}] + \delta [Q_2^{(1)}] + (1) \leq \delta [Q_1^{(1)}] + \delta [Q_2^{(1)}] + (1)$$

Die in Klammern gesetzte Eins muß auf der rechten und kann auf der linken Seite für $l = m - 1$ auftreten. Somit ist auch beim Zweitor b eine RCÜ-Realisierung möglich.

Zweite Möglichkeit

Beim Vergleich der Zählerfunktionen der Gln. (28) und (37) identifiziert man

$$-y_{12}^{(b)}(p) = - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2^{(2)}(p)} \quad (45a)$$

$$\blacksquare K_2 \frac{S_2(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2^{(2)}(p)} \quad (K_2 = \text{const} > 0) . \quad (45b)$$

Der Koeffizient bei der höchsten Potenz des durch Gl. (45b) definierten Polynoms $S_2(p)$ sei gleich Eins. Man stellt leicht fest, daß die durch Gl. (45a) gegebene Zuordnung nur für negative Werte der Übertragungskonstante K möglich ist, da K_2 jedenfalls wegen der Fialkow-Gerst-Bedingungen (vgl. Teil I, Abschnitt 1) positiv sein muß.

Entsprechend der bereits beschriebenen ersten Identifizierungsmöglichkeit wird eine in der Regel von Null verschiedene Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ festgelegt durch

$$Z_0(p) = \sum_{s_1+1}^{s_2} \frac{\xi_v}{p + \zeta_v} \quad (\xi_v > 0) \quad (46a)$$

$$= \eta_0 - \sum_{s_1+1}^{s_2} \frac{p \xi_v / \zeta_v}{p + \zeta_v} \quad (\eta_0 > 0). \quad (46b)$$

Dann bildet man die Funktionen $Z_{RC}(p) = Z_1(p) + Z_0(p)$ und $Z_{RL}(p) = Z_2(p) - Z_0(p)$, oder explizit

$$\begin{aligned} Z_{RC}(p) &= \vartheta_0^{(1)} + \sum_1^{s_1} \frac{\vartheta_v}{p + \zeta_v} + \sum_{s_1+1}^{m+r} \frac{\vartheta_v + \xi_v}{p + \zeta_v} + \sum_{m+r+1}^{s_2} \frac{\xi_v}{p + \zeta_v} \quad (47) \\ &= \frac{B_0'' T_1(p)}{Q_1(p) Q_2^{(1)}(p)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Z_{RL}(p) &= \vartheta_\infty p + \vartheta_0^{(2)} - \eta_0 + \sum_{s_1+1}^{m+r} \frac{p \xi_v / \zeta_v}{p + \zeta_v} + \sum_{m+r+1}^{s_2} \frac{(\vartheta_v + \xi_v / \zeta_v) p}{p + \zeta_v} + \sum_{s_2+1}^{n+m+l} \frac{\vartheta_v p}{p + \zeta_v} \quad (48) \\ &= \frac{A_0'' T_2(p)}{Q_1^{(2)}(p) Q_2(p)} \end{aligned}$$

Alle auftretenden Entwicklungskoeffizienten sind positiv mit Ausnahme der Parameter $\vartheta_0^{(1)}$ und ϑ_∞ , über welche die Beziehungen (33) Auskunft geben. Die Koeffizienten bei den höchsten Potenzen von $T_1(p)$ und $T_2(p)$ seien gleich Eins. Falls $\vartheta_0^{(2)} \geq \eta_0$ gilt, ist $Z_{RL}(p)$ eine RC-Admittanz. Dies läßt sich jedoch immer erreichen,

weil $\mathfrak{S}_0^{(2)} = Z_2(0) > 0$ gilt und durch Wahl hinreichend kleiner Entwicklungskoeffizienten $\xi_{\nu} > 0$ der Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ die Konstante η_0 beliebig klein gemacht werden kann.

Die Bestimmung der restlichen Matrixelemente erfolgt nach dem obigen Vorbild durch Vergleich der Gln. (28) und (37). Mit den Gln. (47) und (48) ergibt sich

$$\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{\mathfrak{g}_0^2} = \frac{\mathfrak{g}_{12}\mathfrak{g}_{21}Q_1(p)Q_2^{(1)}(p)}{B_0''T_1(p)}, \quad (49)$$

$$y_{22}^{(b)}(p) = \frac{A_0''T_2(p)}{Q_1^{(2)}(p)Q_2(p)}. \quad (50)$$

und mit Gl. (45a)

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{\mathfrak{g}_0^2} = \frac{\mathfrak{g}_{12}P_1^{(1)}(p)Q_1^{(2)}(p)}{\mathfrak{g}_0B_0''T_1(p)}, \quad (51a)$$

$$= K_1 \frac{S_1(p)}{T_1(p)} \quad (K_1 = \text{const} > 0). \quad (51b)$$

Der Koeffizient bei der höchsten Potenz des Polynoms $S_1(p)$ sei gleich Eins. Damit sind auch bei der zweiten Identifizierungsmöglichkeit alle Matrixelemente bestimmt. Es muß noch die Zulässigkeit der Paare von Admittanzmatrix-Elementen geprüft werden.

Bei Zweitor a kann man sich auf einen Gradvergleich der Zählerpolynome von $y_{12}^{(a)}(p)$ und $y_{22}^{(a)}(p)$ beschränken:

$$\delta[S_1] \leq \delta[Q_1] + \delta[Q_2^{(1)}]$$

oder mit den Gln. (51a,b) und (36)

$$\delta[Q_1^{(1)}] + \delta[Q_2^{(1)}] + (1) + \delta[Q_1^{(2)}] \leq \delta[Q_1] + \delta[Q_2^{(1)}] .$$

Die in Klammern stehende Eins auf der linken Seite dieser Beziehung tritt genau dann auf, wenn $l = m-1$ gewählt wurde und der Grad des Zählerpolynoms der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist. Dieser Fall ist somit unzulässig. Bei Übereinstimmung von Zähler- und Nennergrad der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion muß hier also $l = m$ gewählt werden.

Vom Element $y_{22}^{(b)}(p)$ können die gegenüber $y_{12}^{(b)}(p)$ überzähligen endlichen Pole [Nullstellen von $Q_2^{(1)}(p)$] vorweg abgespalten werden. Dann muß mit den Gln. (36), (45a) und (48) die Gültigkeit der folgenden Ungleichung zwischen den Zählergraden von $y_{12}^{(b)}(p)$ und dem Rest von $y_{22}^{(b)}(p)$ gefordert werden:

$$\delta[S_2] \leq \delta[T_2] - \delta[Q_2^{(1)}]$$

oder

$$\delta[Q_1^{(2)}] + \delta[Q_2^{(2)}] \leq \delta[Q_1^{(2)}] + \delta[Q_2^{(2)}] + (1) .$$

Diese Beziehung wird in jedem Fall erfüllt.

Zusammenfassung der Syntheseprozedur

Nach der Zerlegung des Nenners und des Zählers von $H(p)$ gemäß den Abschnitten 2.1 und 2.2 bestimmt man die Erweiterungsfunktion $Z_o(p)$ nach einer der beiden Möglichkeiten. Als Auswahlkriterium wird gewöhnlich der Grad von $Z_o(p)$ dienen, der möglichst klein sein soll.

Damit können die gesuchten Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore in der beschriebenen Weise bestimmt werden. Da die Übertragungskonstanten K_1 und K_2 der RC-Zweitore a und b positiv sind, müssen

jedenfalls die Gyrationaleitwerte g_{12} und g_{21} negativ sein, was durch Umkehrung des Gytrators erreicht wird. Eine Schwierigkeit besteht nur noch darin, daß die Konstanten K_1 und K_2 bestimmte Maximalwerte nicht überschreiten dürfen (vgl. I, 1). Dies bedeutet umgekehrt formuliert, daß die noch unbestimmten Parameter g_0 und K nicht beliebig gewählt werden können. Zwei mögliche Wege werden im folgenden beschrieben.

Ist g_0 nicht vorgeschrieben, so verwirklicht man zunächst die Paare $y_{22}^{(b)}(p)$, $y_{12}^{(b)}(p)$ und $y_{22}^{(a)}(p)/g_0^2$, $y_{12}^{(a)}(p)/g_0^2$, woraus sich realisierte Konstanten K_2 und K_1 ergeben. Aus Gl. (38a) bzw. Gl. (45a) folgt dann die Übertragungskonstante des Gesamtzweiters K und mit dieser aus Gl. (44a) bzw. Gl. (51a) die Größe g_0 .

Ist andererseits die Größe g_0 vorgeschrieben (auf solche Fälle wird später eingegangen), so müssen zunächst ebenfalls die beiden Paare von Matrixelementen verwirklicht werden, die dem Realisierungsverfahren entsprechende Konstanten K_1 und K_2 liefern. Aus den Gln. (38a) und (44a) bzw. den Gln. (45a) und (51a) resultieren nun zwei Werte für die Übertragungskonstante K , von denen der kleinere gewählt werden muß. Da eine der genannten Gleichungen dann nicht mehr erfüllt ist, muß eine entsprechende Verkleinerung an K_1 oder an K_2 durchgeführt werden³⁾, die eine Änderung des betroffenen Zweiters zur Folge hat.

2.4. Vereinfachte Darstellung für Übertragungsfunktionen ohne Pole und Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse

Wenn keine reellen Übertragungspole vorgeschrieben sind, gilt nach Abschnitt 2.1, Gl. (30) $n = r = 0$, und die Zerlegung des Nenners der Übertragungsfunktion kann nach Calahan mit minimaler Nullstellenempfindlichkeit durchgeführt werden. Mit den Hilfspolynomen

³⁾ Dies ist immer möglich, wie z.B. das Fialkow-Gerst-Verfahren erkennen läßt.

$$Q_1(p) = \prod_1^m (p + \alpha_1),$$

$$Q_2(p) = \prod_1^1 (p + \beta_1)$$

lauten die Summanden der Zerlegung

$$Z_1(p) = B_0 \frac{Q_2(p)}{Q_1(p)},$$

$$Z_2(p) = A_0 \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}.$$

Nach der Beziehung (6b) alternieren die Stellen $-\alpha_i$ und $-\beta_i$ auf der negativ reellen p-Achse. Bezeichnet man die Nullstellen der Hilfspolynome gemäß den Gln. (31a,b), so gilt

$$\zeta_i = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\zeta_{m+i} = \beta_i \quad (i = 1, \dots, l)$$

und damit

$$\zeta_1 < \zeta_{m+1} < \zeta_2 < \zeta_{m+2} < \dots < \zeta_m \quad [< \zeta_{2m} \text{ für } l=m].$$

Bei der Partialbruchentwicklung des Zählers der Übertragungsfunktion alternieren die Vorzeichen der Entwicklungskoeffizienten in den Polen auf der negativ reellen p-Achse. Diese Entwicklungskoeffizienten erhält man nämlich aus der Beziehung

$$\lim_{p \rightarrow -\zeta_\nu} (p + \zeta_\nu) \frac{P_1(p)}{pQ(p)}, \quad (52)$$

mit welcher sich die Behauptung leicht bestätigen läßt. Die Koeffizienten λ_ν der Gl. (34) lauten hiermit

$$\frac{P_1(-\tilde{\epsilon}_v)}{-\tilde{\epsilon}_v \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^{m+1} (-\tilde{\epsilon}_v + \tilde{\epsilon}_\mu)} = \begin{cases} (-1)^{v-1} \lambda_v & \text{für geraden Grad von } P_1 \\ (-1)^v \lambda_v & \text{für ungeraden Grad von } P_1 \end{cases} \quad (53)$$

Im folgenden muß zwischen geradem und ungeradem Grad von $P_1(p)$ unterschieden werden. Falls der Grad von $P_1(p)$ gerade ist, erhält man

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left[\lambda_{\infty} p + \lambda_0 + \sum_{m+1} \frac{\lambda_v p}{p + \tilde{\epsilon}_v} - \sum_1 \frac{\lambda_v p}{p + \tilde{\epsilon}_v} \right] \quad (54)$$

$$= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1(p)} \quad (55)$$

Hieraus kann unmittelbar gemäß Gl. (34) $s_1 = 0$ und $s_2 = m+1$ abgelesen werden, und mit den Gln. (35a-d) ergibt sich

$$Q_1^{(1)}(p) = 1 \quad ; \quad Q_1^{(2)}(p) = Q_1(p) ;$$

$$Q_2^{(1)}(p) = Q_2(p) ; \quad Q_2^{(2)}(p) = 1 \quad .$$

Aus Gl. (39a) entnimmt man, daß die Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ bei der ersten Identifizierungsmöglichkeit verschwindet; deshalb ist nur die Anwendung dieser Möglichkeit hier zweckmäßig und wirtschaftlich. Es gilt also gemäß Abschnitt 2.3, insbesondere den Gln. (38a,b), (42), (43) und (44a,b)

$$\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{\varepsilon_0^2} = \frac{\varepsilon_{12} \varepsilon_{21} Q_1(p)}{B_0 Q_2(p)} \quad , \quad (56)$$

$$y_{22}^{(b)}(p) = \frac{A_0 Q_1(p)}{Q_2(p)} \quad (57)$$

und

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{\varepsilon_0^2} = \frac{-\varepsilon_{12} P_1^{(2)}(p)}{B_0 \varepsilon_0 Q_2(p)} \equiv K_1 \frac{S_1(p)}{Q_2(p)} \quad , \quad (58)$$

$$-y_{12}^{(b)}(p) = \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} \equiv K_2 \frac{S_2(p)}{Q_2(p)} \quad . \quad (59)$$

Falls der Grad von $P_1(p)$ ungerade ist, muß er mindestens um Eins kleiner sein als der Grad von $P_2(p)$ und man erhält für die Partialbruchdarstellung des Zählers

$$\begin{aligned} \frac{P_1(p)}{Q(p)} &= K \left[\sum_1^m \frac{\lambda_\nu p}{p + \delta_\nu} - (-\lambda_0 + \sum_{m+1}^{m+1} \frac{\lambda_\nu p}{p + \delta_\nu}) \right] \\ &= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_1(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_2(p)} \quad . \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gl. (34) ermittelt man leicht die Beziehungen $s_1=m$ und $s_2=m$. Die Gln. (35a-d) lassen sich hiermit vereinfacht in der Form

$$Q_1^{(1)}(p) = Q_1(p) \quad ; \quad Q_1^{(2)}(p) = 1 \quad ;$$

$$Q_2^{(1)}(p) = 1 \quad ; \quad Q_2^{(2)}(p) = Q_2(p)$$

darstellen, und Gl. (46a) zeigt, daß in diesem Fall die zweite Identifizierungsmöglichkeit eine verschwindende Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ ergibt.

Zur Bestimmung der Funktionen $y_{22}^{(a)}$ und $y_{22}^{(b)}$ sind auch hier die Gln. (56) und (57) gültig. Die Gln. (58) und (59) müssen jedoch ersetzt werden durch die Beziehungen

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_0^2} = \frac{g_{12} P_1^{(1)}(p)}{g_0 B_0 Q_2(p)} \equiv K_1 \frac{S_1(p)}{Q_2(p)} \quad (60)$$

und

$$-y_{12}^{(b)}(p) = \frac{-P_1^{(2)}(p)}{Q_2(p)} \equiv K_2 \frac{S_2(p)}{Q_2(p)} \quad (61)$$

Es sei noch einmal erwähnt, daß die Übertragungskonstante K des Gesamtzweiters bei Anwendung der zweiten Identifizierungsmöglichkeit negativ wird. Über die Festlegung der in Grenzen frei wählbaren Parameter g_0 und K gilt das im Abschnitt 2.3 Gesagte.

2.5. Verwendung von nicht-idealen Gyrotoren mit endlicher Güte

Das in den letzten Abschnitten beschriebene Syntheseverfahren ging von der Annahme aus, daß die Gyrotoren eine unendlich große Güte besitzen. Der augenblickliche Stand der Technik erlaubt die Herstellung von integrierten Gyrotoren mit einer hinreichend stabilen Güte von ca. 500 bis zu Frequenzen um 10 kHz. Dadurch erscheint die obige Annahme gerechtfertigt.

In kritischen Fällen bzw. beim Einsatz einfacher Gyrotoren ist bis zu einem gewissen Grad eine Berücksichtigung endlicher Gyrotorgüten,

d.h. nicht-verschwindender Hauptdiagonalelemente der Admittanzmatrix bei der Synthese möglich. Gemäß Bild 12 können diese Hauptdiagonalelemente $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ durch Ohmwidestände berücksichtigt werden, die parallel zum Eingang bzw. zum Ausgang eines idealen aktiven Gyrators liegen. Häufig lassen sich nun die passiven RC-Zweitore so realisieren, daß parallel zu ihren dem Gyrator zugewandten Toren ebenfalls Ohmwidestände auftreten, die vollständig durch die "Verlustleitwerte" des Gyrators verwirklicht werden können (vgl. Bild 12).

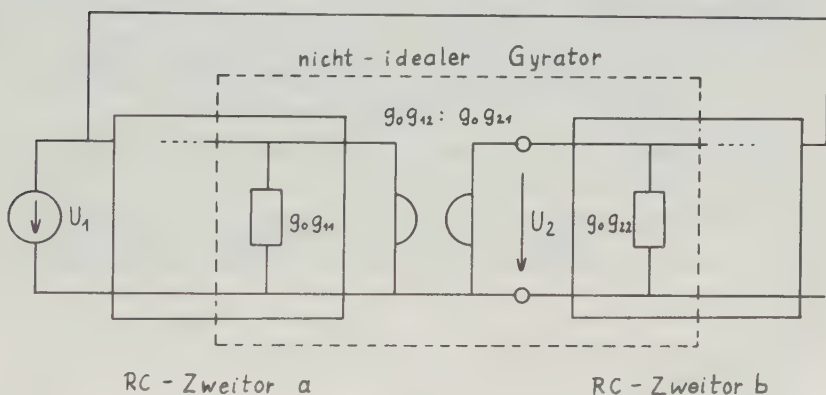


Bild 12: Realisierung der Verlustleitwerte des Gyrators durch die RC-Zweitore a und b

Die Grenzen dieser Verlustberücksichtigung werden im folgenden für das allgemeine in den Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.3 beschriebene Syntheseverfahren hergeleitet.

Nach der Abspaltung der benötigten ohmschen Querleitwerte von den RC-Zweitoren a und b müssen die Restzweitore a_1 und b_1 noch mit positiven Netzwerkelementen realisierbar sein. Die Matricelemente dieser Restzweitore lauten gemäß Abschnitt 2.3:

$$y_{22}^{(a1)}(p) = y_{22}^{(a)}(p) - g_0 g_{11}$$

$$= \frac{g_0^2 g_{12} g_{21}}{Z_1(p) + Z_0(p)} - g_0 g_{11} ,$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) \equiv -y_{12}^{(a)}(p)$$

und

$$y_{22}^{(b1)}(p) = y_{22}^{(b)}(p) - g_0 g_{22}$$

$$= Z_2(p) - Z_0(p) - g_0 g_{22} ,$$

$$-y_{12}^{(b1)}(p) \equiv -y_{12}^{(b)}(p) .$$

Falls diese Paare von Admittanzmatrix-Elementen mit positiven Netzwerkelementen realisiert werden sollen, müssen die Ungleichungen

$$\frac{g_0^2 g_{12} g_{21}}{Z_1(0) + Z_0(0)} - g_0 g_{11} \geq 0$$

und

$$Z_2(0) - Z_0(0) - g_0 g_{22} \geq 0$$

gelten, woraus eine obere Grenze g_0'' bzw. eine untere Grenze g_0' für g_0 zu entnehmen ist. Die Gleichheitszeichen sind nur in den Fällen $y_{12}^{(a)}(0) = 0$ bzw. $y_{12}^{(b)}(0) = 0$ zulässig. Die genannten Grenzen g_0'' und g_0' lauten

$$g_0'' = \frac{Z_2(0) - Z_0(0)}{g_{22}} \quad (62a)$$

bzw.

$$g'_0 = \frac{g_{11} [Z_2(0) - Z_0(0)]}{g_{12}g_{21}} . \quad (62b)$$

Die Realisierbarkeit ist sicher nicht mehr gewährleistet, wenn die untere Grenze g'_0 die obere Grenze g''_0 übertrifft. Es muß also gelten

$$g''_0 \geq g'_0 ,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Fall $y_{12}^{(a)}(0) = 0$ und $y_{12}^{(b)}(0) = 0$ zugelassen werden kann. Mit den Gln. (62a,b) folgt daraus

$$\frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}} \geq \frac{Z_1(0) + Z_0(0)}{Z_2(0) - Z_0(0)} . \quad (63)$$

Da $y_{22}^{(b)}(p)$ eine RC-Admittanz ist, muß natürlich $Z_2(0) - Z_0(0) \geq 0$ sein. Nach Anhang A stehen die Werte $Z_1(0)$ und $Z_2(0)$ in einer bestimmten Beziehung zu der "optimalen" Calahan-Zerlegung. Es gilt nämlich entsprechend den Gln. (VI) und (VII):

$$Z_1(0) = M B_0 \frac{\tilde{Q}_2(0)}{\tilde{Q}_1(0)} + Z(0) \quad (64a)$$

und

$$Z_2(0) = M \frac{\tilde{Q}_1(0)}{\tilde{Q}_2(0)} - Z(0) \quad (64b)$$

$$(M > 0, Z(0) \geq 0) .$$

Dabei sind $\tilde{Q}_1(p)$ und $\tilde{Q}_2(p)$ die bei der "optimalen" Zerlegung auftretenden Hilfspolynome, wenn nur das sämtliche komplexen Nullstellen enthaltende Faktorpolynom von $P_2(p)$ zerlegt wird. Falls $P_2(p)$ keine reellen Nullstellen besitzt, kann somit $M = 1$ und $Z(p) \equiv 0$ erreicht werden. Weist das Nennerpolynom $P_2(p)$ der vor-

geschriebenen Übertragungsfunktion auch reelle Nullstellen auf, so kann der Funktionswert $Z(0) > 0$ beliebig klein gemacht werden, falls die im Teil I, Abschnitt 3.2 beschriebene Zerlegungsmöglichkeit verwendet wird (vgl. Anhang A).

Mit den Beziehungen (64a,b) lautet nun die Ungleichung (63)

$$\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}} \geq \frac{B_0 \tilde{Q}_2^2(0) + \tilde{Q}_1(0) \tilde{Q}_2(0) [Z(0) + Z_0(0)] / M}{\tilde{Q}_1^2(0) - \tilde{Q}_1(0) \tilde{Q}_2(0) [Z(0) + Z_0(0)] / M}$$

oder

$$\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}} \geq \frac{B_0 \tilde{Q}_2^2(0)}{\tilde{Q}_1^2(0)} . \quad (65)$$

Das Gleichheitszeichen ist nur dann möglich, wenn $Z(0) = Z_0(0) = 0$ gilt.

Nach den Gln. (12a) und (13) erhält man mit den hier gültigen Identitäten $\tilde{Q}_1(p) \equiv U(p)$ und $\tilde{Q}_2(p) \equiv V(p)$ und mit $\mathcal{V} = 0$ die Beziehungen

$$\operatorname{Re} \prod_1^m (-p_\mu) = \tilde{Q}_1(0) ,$$

$$\operatorname{Im} \prod_1^m (-p_\mu) = \sqrt{B_0} \tilde{Q}_2(0) .$$

Durch Bildung des Quotienten dieser beiden Gleichungen folgt also

$$\frac{\sqrt{B_0} \tilde{Q}_2(0)}{\tilde{Q}_1(0)} = \tan \sum_1^m \arg (-p_\mu)$$

und schließlich mit den Gln. (27) und (65)

$$4Q_G^2 - 1 \geq \tan^2 \sum_1^m \arg(-p_\mu) . \quad (66)$$

Zur Interpretation dieser Ungleichung führt man einen fiktiven Pol p_f der Übertragungsfunktion ein. Der Winkel des Punktes $-p_f$ sei durch die Beziehung

$$\Upsilon = \arg(-p_f) = \sum_1^m \arg(-p_\mu) \quad (67)$$

gegeben. Definiert man gemäß Teil I, Abschnitt 4.2 die Güte des komplexen Übertragungspols p_f durch

$$Q_P = \frac{|p_f|}{2\operatorname{Re}(-p_f)} ,$$

so gilt der Zusammenhang

$$Q_P = \frac{1}{2 \cos \Upsilon} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \Upsilon}$$

oder

$$\tan^2 \Upsilon = 4Q_P^2 - 1 .$$

Die rechte Seite der Ungleichung (66) kann durch das obige Ergebnis ersetzt werden. Daraus folgt für die Grenze der Gyratorgüte

$$4Q_G^2 - 1 \geq 4Q_P^2 - 1$$

oder

$$Q_G \geq Q_P . \quad (68)$$

Die Gyratorgüte muß bei vollständiger Verlustberücksichtigung also gleich oder größer sein als die Güte eines fiktiven Übertragungspols, dessen Winkel Υ durch Gl. (67) definiert ist. Falls Υ gegen $\pi/2$ strebt, muß daher die Gyratorgüte über alle Grenzen wachsen. Das Gleichheitszeichen in Ungleichung (68) kann nur dann auftreten, wenn ausschließlich komplexe Übertragungspole vorhanden sind.

2.6. Zwei Beispiele

Beispiel 2

Vorgeschrieben sei die Übertragungsfunktion dritten Grades

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = \frac{K(p+1)(p+3)}{(p+2)(p^2 + \sqrt{3}p+1)}.$$

Die Übertragungskonstante K ist nicht festgelegt und resultiert aus dem Syntheseprozess. Der gegebene Gyrator sei ideal und besitze gemäß Gl. (23b) die Admittanzmatrix-Elemente $g_{11}=g_{22}=0$, $g_{12}=g_{21}=-1$. Der das Impedanzniveau des Gyrtors bestimmende Faktor g_0 ergibt sich zusammen mit K im Verlaufe des Synthesevorgangs.

Im ersten Schritt muß gemäß Abschnitt 2.1 die RC-RL-Zerlegung des Nenners durchgeführt werden. Sie erfolgt nach der im Teil I, Abschnitt 3.2 angegebenen Vorschrift. Die der Gl. (16) entsprechende Darstellung von $P_2(p)$ lautet

$$P_2(p) = (p+2)(p + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2})(p + \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}), \text{ d.h. es gilt}$$

$$m=1, n=1, \arg(-p_1) = \pi/6 < \pi/2.$$

Die Zerlegung des Faktors mit dem konjugiert komplexen Nullstellenpaar ergibt mit Gl. (12a) für $\mathcal{Y} = 0$ ($J=1$) :

$$p + \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} = U(p) + jV(p)$$

und daraus

$$U(p) = p + \frac{\sqrt{3}}{2} = A_0 (p + \alpha_1),$$

$$V(p) = \frac{1}{2} = B_0.$$

Es ist offensichtlich $l=m-1$. Damit erreicht man die Darstellung des modifizierten Nenners gemäß Gl. (17)

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{p+2}{p+\tilde{r}_1} \left[p + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1/2}{p + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right].$$

Mit der Wahl $\tilde{r}_1 = 3/2$ sind die Funktionen $\tilde{z}_1(p)$ und $\tilde{z}_2(p)$ festgelegt durch

$$\tilde{z}_1(p) = \frac{-0,394338}{p + 3/2} + \frac{0,894338}{p + \sqrt{3}/2},$$

$$\tilde{z}_2(p) = p + 1,366025 - \frac{0,316987}{p + \frac{3}{2}}$$

und damit nach Gl. (18) auch die rationale Funktion

$$z(p) = \frac{0,394338}{p + \frac{3}{2}}.$$

Die Summanden der RC-RL-Zerlegung von $P_2(p)$ lauten also

$$z_1(p) = \tilde{z}_1(p) + z(p) = \frac{0,894338}{p + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

und

$$z_2(p) = \tilde{z}_2(p) - z(p) = p + 0,891809 + \frac{0,474217p}{p + \frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt $r=0$ und die Funktion $z_2(p)$ ist wegen $z_2(0) > 0$ wie gefordert eine RC-Admittanz. Die beiden Faktoren des Hilfspolynoms $Q(p)$ sind gemäß Gl. (30) durch

$$Q_1(p) = (p + \frac{\sqrt{3}}{2}) = (p + \sigma_1)$$

und

$$Q_2(p) = (p + \frac{3}{2}) = (p + \sigma_2)$$

gegeben.

Im zweiten Schritt des Verfahrens wird der Zähler der Übertragungsfunktion $P_1(p)/Q(p)$ zerlegt (vgl. Abschnitt 2.2). Die Gln. (34) und (36) lauten für die gegebenen Daten

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left(2,30940 - \frac{0,788675p}{p + \frac{3}{2}} - \frac{0,520726p}{p + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

oder nach Zusammenfassung der Terme mit gleichem Vorzeichen

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = 2,30940 K - \frac{1,309401p(p + 1,118146)}{(p + \frac{\sqrt{3}}{2})(p + \frac{3}{2})} K. \quad (69)$$

Somit gilt $s_1=0$, $s_2=1$ und gemäß den Gln. (35a-d)

$$Q_1^{(1)} = 1, \quad Q_1^{(2)} = p + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$Q_2^{(1)} = 1, \quad Q_2^{(2)} = p + \frac{3}{2}.$$

Wie man leicht feststellt, ist der Grad der Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ (vgl. Abschnitt 2.3) bei beiden Identifizierungsmöglichkeiten derselbe. Im folgenden wird die erste Möglichkeit gewählt. Bei dieser ergibt sich für $Z_0(p)$ Gl. (39a) mit der Wahl $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$:

$$Z_0(p) = \frac{\frac{1}{2}}{p + \frac{3}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{3}p}{p + \frac{3}{2}}.$$

Nun können die endgültigen Summanden $Z_{RC}(p)$ Gl. (40) und $Z_{RL}(p)$ Gl. (41) der Nennerzerlegung gebildet werden:

$$\begin{aligned} Z_{RC}(p) &= Z_1(p) + Z_0(p) = \frac{1,394338(p + 1,272661)}{(p + \frac{\sqrt{3}}{2})(p + \frac{3}{2})} \\ &= \frac{B_o''T_1(p)}{Q_1(p)Q_2^{(2)}(p)} \end{aligned}$$

und

$$Z_{RL}(p) = Z_2(p) - Z_0(p) = p + 0,558475 + \frac{0,807550p}{p + \frac{3}{2}}.$$

Die Funktion $Z_{RL}(p)$ ist offensichtlich eine RC-Admittanz. Man erhält weiter gemäß den Gln. (42) und (43)

$$\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{g_o^2} = \frac{1}{Z_{RC}(p)} ,$$

$$y_{22}^{(b)}(p) = Z_{RL}(p) .$$

Die Gln. (38a) und (44a) liefern mit Gl. (69) und der Funktion $Z_{RC}(p)$:

$$-y_{12}^{(b)}(p) = 2,30940 K \equiv K_2 S_2(p) , \quad (70)$$

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_o^2} = \frac{K}{g_o} \cdot \frac{0,939085p(p + 1,118146)}{(p + 1,272661)} \equiv K_1 S_1(p) . \quad (71)$$

Damit sind beide Paare von Admittanzmatrix-Elementen bis auf die Konstanten K_1 und K_2 bestimmt. Der Wert von g_o ist keinen Einschränkungen unterworfen, da der Gyrator die Güte Unendlich besitzt.

Der letzte Schritt des Verfahrens besteht dann in der Realisierung der RC-Zweitore (mit zunächst unbestimmten Übertragungskonstanten) und der Ermittlung der Konstanten K und g_o .

Die Realisierung des Paares $y_{22}^{(b)}$ und $y_{12}^{(b)}$ durch ein Abzweignetzwerk ergibt das im Bild 13 dargestellte Zweitor mit der Übertragungskonstante $K_2 = 0,558475$.

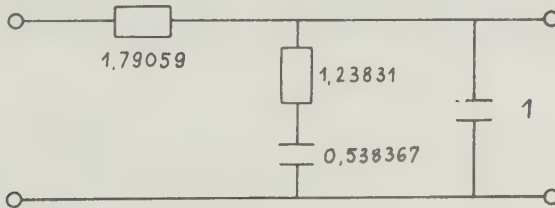


Bild 13: Zweitor b

Die Realisierung des Paares $y_{22}^{(a)}/g_0^2$ und $y_{12}^{(a)}/g_0^2$ durch ein Abzweignetzwerk ergibt das im Bild 14 dargestellte Zweitor mit der Übertragungskonstante $K_1 = 0,717186$.

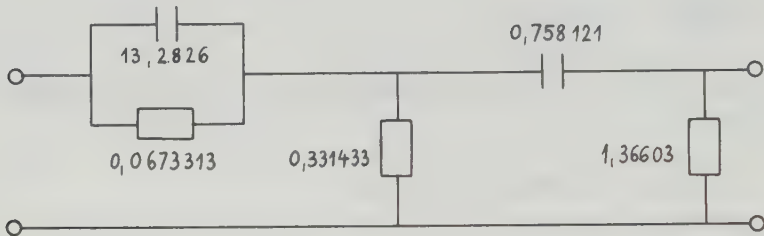


Bild 14: Zweitor a

Die nunmehr bekannten Konstanten K_1 und K_2 erlauben mit Hilfe der Gl. (70) und (71) die Berechnung der Größen K und g_0 . Gl. (70) liefert

$$K = \frac{K_2}{2,3094} = 0,241827$$

und Gl. (71) mit diesem Ergebnis

$$g_0 = \frac{0,939085K}{K_1} = 0,316649 .$$

Nach einer Verschiebung des Impedanzniveaus von Zweitor a um den Faktor $1/g_0^2$ ist die Synthese abgeschlossen. Eine geeignete Entnormierung des Gesamtzweitorts ermöglicht die Anpassung an den Gyrationaleitwert des praktischen Gyrtors.

Beispiel 3

Es soll die Allpaß-Übertragungsfunktion vierten Grades

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = \frac{K(p^2 - 2p + 2)(p^2 - \sqrt{3}p + 1)}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + \sqrt{3}p + 1)}$$

realisiert werden. Da diese Funktion keine negativ reellen Pole und Nullstellen besitzt, läßt sich die vereinfachte Darstellung des Verfahrens nach Abschnitt 2.4 heranziehen. Der gegebene Gyrator sei nicht-ideal, und seine normierte Admittanzmatrix laute

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0,1 & -1 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Nach Gl. (27) hat die Güte dieses Gyrtors den Wert $Q_G = 5,025$, während die Güte Q_P des im Abschnitt 2.5 definierten fiktiven Pols mit dem Winkel $\varphi + \arg(-p_1) + \arg(-p_2) = \frac{5\pi}{12}$ (für $\varphi = 0$) durch

$$Q_P = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tan^2 \frac{5\pi}{12}} = 1,932$$

gegeben ist. Eine Realisierung mit vollständiger Verlustberücksichtigung muß daher wegen $Q_G > Q_P$ möglich sein.

In einem ersten Schritt muß wieder die RC-RL-Zerlegung des Nenners von $H(p)$ durchgeführt werden. Das vorgeschriebene Nennerpolynom stimmt jedoch mit dem im Beispiel 1 zerlegten Polynom überein, und man erhält aufgrund der dort entnommenen Resultate gemäß Abschnitt 2.4 die beiden Faktoren des Hilfspolynoms (für $\varphi = 0$, d.h. $l=m-1$):

$$\begin{aligned} Q_1(p) &= (p + 0,222740)(p + 1,643285) \\ &= (p + \sigma_1)(p + \sigma_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2(p) &= (p + 0,910684) \\ &= p + \sigma_3 \end{aligned}$$

und

$$A_0 = 1, \quad B_0 = 2,25.$$

Die Zerlegung des durch das Hilfspolynom dividierten Nennerpolynoms von $H(p)$ lautet hiermit

$$\begin{aligned}\frac{P_2(p)}{Q(p)} &= Z_1(p) + Z_2(p) \\ &= B_0 \frac{Q_2(p)}{Q_1(p)} + A_0 \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)}.\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird der Zähler $P_1(p)/Q(p)$ nach den Gln. (54) und (55) in die Differenz zweier RC-Admittanzen zerlegt:

$$\begin{aligned}\frac{P_1(p)}{Q_1(p)Q_2(p)} &= K \left[p + 6 + \frac{34,5195p}{p + 6,3} - \left(\frac{16,4534p}{p + 6,1} + \frac{30,5748p}{p + 6,2} \right) \right] \\ &= K \frac{(p + 0,132310)(p + 41,2979)}{p + 0,910684} - \\ &\quad - K \frac{47,0282p(p + 0,719736)}{(p + 0,22274)(p + 1,64329)} \\ &= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1(p)}.\end{aligned}$$

Da das Zählerpolynom von $H(p)$ einen geradzahligen Grad besitzt, ist es nach Abschnitt 2.4 zweckmäßig, die erste Identifizierungsmöglichkeit anzuwenden, für welche $Z_0(p)$ verschwindet. Durch Einsetzen der bisher gewonnenen Daten in die Gln. (56)-(59) erhält man die folgenden Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore:

$$\begin{aligned}\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{g_0^2} &= \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{(p + 0,222740)(p + 1,643285)}{2,25(p + 0,910684)}, \\ y_{22}^{(b)}(p) &= Z_2(p) = \frac{(p + 0,222740)(p + 1,643285)}{(p + 0,910684)}, \\ \frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_0^2} &= \frac{K}{g_0} \cdot \frac{47,0282p(p + 0,719736)}{2,25(p + 0,910684)} \equiv K_1 S_1(p)\end{aligned}\quad (72)$$

und

$$y_{12}^{(b)}(p) = \frac{K(p + 0,132310)(p + 41,2979)}{(p + 0,910684)} = K_2 S_2(p) . \quad (73)$$

Die Elemente sind also bis auf die Übertragungskonstanten K_1 und K_2 der Zweitore a und b festgelegt. Nach Abschnitt 2.6 muß infolge der geplanten Verlustberücksichtigung bei der Festlegung dieser Konstanten abweichend vom Beispiel 2 vorgegangen werden, da der Parameter g_0 nicht mehr vollständig frei wählbar ist.

Im dritten Schritt des Verfahrens wird zunächst gemäß den Gln. (64a,b) der zulässige Bereich für die Konstante g_0 ermittelt. Man erhält

$$g'_0 = 0,5598$$

und

$$g''_0 = 4,019 .$$

Für die Wahl $g_0 = \sqrt{g'_0 g''_0} = 1,5$ ergibt sich eine maximale, gleichmäßige Reserve in beiden RC-Zweitoren. Damit können die Paare von Admittanzmatrix-Elementen $y_{22}^{(a)}(p)$, $y_{12}^{(a)}(p)$ und $y_{22}^{(b)}(p)$, $y_{12}^{(b)}(p)$ realisiert werden, woraus vorläufige Konstanten K_1 und K_2 folgen. Die Realisierung von Zweitor b als Abzweignetzwerk zeigt Bild 15, die Übertragungskonstante ist $K_2 = 0,0377301$.

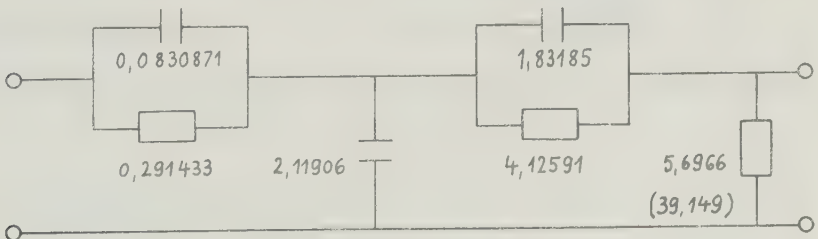


Bild 15: Zweitor b

Die Realisierung von Zweitor a durch ein Abzweignetzwerk ist im Bild 16 dargestellt, die resultierende Übertragungskonstante ist $K_1 = 4/9$.

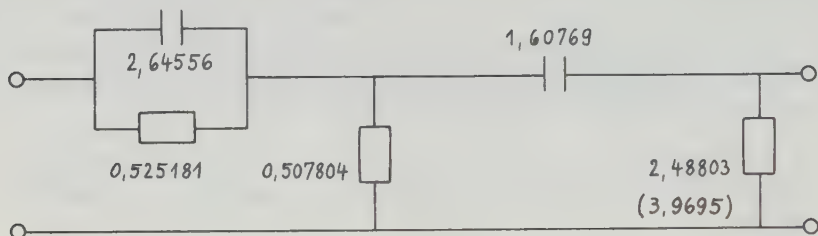


Bild 16: Zweitor a

Die parallel zu den Ausgängen der Zweitore liegenden Ohmwiderstände können wie erwartet die Verlustwiderstände des Gytrators kompensieren. Nach dieser Verlustberücksichtigung gelten die in Klammern gesetzten Werte der Ohmwiderstände.

Wie bereits erwähnt und im Abschnitt 2.3 näher erläutert wurde, muß eine der Konstanten K_1 und K_2 nachträglich korrigiert werden. Aus den Gl. (72) und (73) ergeben sich nämlich zwei in der Regel verschiedene Übertragungskonstanten $K^{(a)}$ und $K^{(b)}$ für das Gesamtzweitor. Die Gl. (72) liefert

$$K^{(a)} = \frac{2,25 K_1 g_0}{47,0282} = 0,0318957$$

und Gl. (73)

$$K^{(b)} = K_2 = 0,0377301 .$$

Es muß nun $K = \min [K^{(a)}, K^{(b)}] = 0,0318957$ gesetzt werden. Dadurch wird Gl. (73) verletzt. Eine Verkleinerung von K_2 sorgt jedoch für die Gültigkeit dieser Beziehung. Das Zweitor b muß hierzu so verändert werden, daß es die Übertragungskonstante $K_2 = K = 0,0318957$ aufweist. Das entsprechend geänderte Netzwerk von Bild 15 ist im Bild 17 dargestellt.

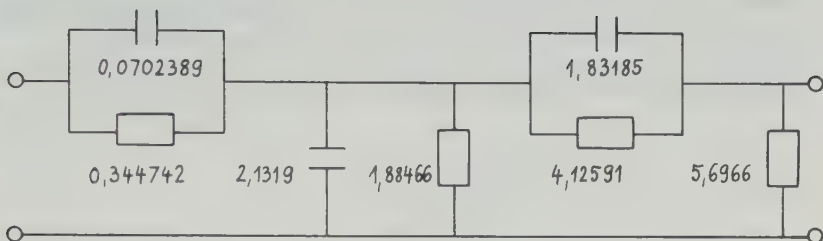


Bild 17: Zweitor b mit korrigierter Übertragungskonstante

Der im Gesamtnetzwerk eingesetzte Gyrator besitzt die Admittanzmatrix

$$\underline{Y} = 1,5 \begin{bmatrix} 0,1 & -1 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix}.$$

Nach einer geeigneten Entnormierung des Gesamtzweitores erhält man eine Anpassung an das Impedanzniveau des praktischen Gyrators.

3. Realisierung einer beliebigen Übertragungsfunktion zweiten Grades mit einem nicht-idealen Gyrator

3.1. Vorbemerkung

Übertragungsfunktionen höheren Grades stellt man häufig durch ein Produkt von Faktoren höchstens zweiten Grades dar, die einzeln realisiert und über Trennverstärker in Kette geschaltet werden [6]. Diese Maßnahme kann z.B. dann notwendig sein, wenn für das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion die Winkelsumme Gl.(22) den Wert $\pi/2$ überschreitet. Darüber hinaus bietet diese Methode gewöhnlich die Vorteile von geringeren Pol- und Nullstellenempfindlichkeiten und einer Erleichterung des praktischen Netzwerkabgleichs. Faktoren mit reellen Polen werden durch passive RC-Zweitore realisiert.

Da somit die restlichen jeweils nur zwei zueinander konjugiert komplexe Pole enthalten, die wegen der Stabilität in der offenen linken Halbebene liegen müssen, ist die Winkelbedingung Gl. (22) für jeden Faktor zweiten Grades von $H(p)$ immer erfüllt.

Die gegebenen Übertragungsfunktionen sollen also die Form

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = K \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$$

mit $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $4b_0 \geq b_1^2$

besitzen, wobei der Koeffizient bei der höchsten im Zähler auftretenden Potenz positiv sei.

3.2. Die Bestimmung der Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore

3.2.1. Übertragungsfunktionen ohne Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse

Die Verwirklichung von Übertragungsfunktionen beliebigen Grades, die keine Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse aufweisen, wurde im Abschnitt 2.4 behandelt. Es mußten zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob der Zählergrad von $H(p)$ gerade oder ungerade war. Um das Verfahren flexibler zu machen, wird im folgenden ein in Grenzen beliebiges Hilfspolynom ersten Grades

$$Q(p) = p + \zeta_1 \quad (\zeta_1 > 0)$$

verwendet. Trotzdem sind die Ergebnisse denen von Abschnitt 2.4 ähnlich.

Offensichtlich gilt mit den dortigen Bezeichnungen $l=m-1$, und die Zerlegung des modifizierten Nenners der Übertragungsfunktion ergibt

$$\begin{aligned} \frac{P_2(p)}{Q(p)} &= \frac{P_2(-\zeta_1)}{p + \zeta_1} + p + (b_1 - \zeta_1) \\ &= Z_1(p) + Z_2(p) \quad , \end{aligned} \tag{74}$$

woraus mit Hilfe der Gln. (32a,b,c) die Beziehungen

$$Q_1(p) = p + \zeta_1 \quad ; \quad Q_2(p) = 1 ; \quad (75a,b)$$

$$B'_0 = P_2(-\zeta_1) ; \quad A'_0 = 1 \quad (76a,b)$$

entnommen werden können.

Die Zerlegung des modifizierten Zählers von $H(p)$ lautet bei geradem Grad von $P_1(p)$

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left[a_2 p + \frac{a_0}{\zeta_1} - \frac{\tilde{P}_1(-\zeta_1)}{\zeta_1} \cdot \frac{p}{p + \zeta_1} \right] \quad (77a)$$

$$= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1(p)} . \quad (77b)$$

Wie in Gl. (77a) wird auch weiterhin die Darstellung $P_1(p) = K\tilde{P}_1(p)$ benutzt werden. Man stellt leicht fest, daß bei Anwendung der ersten Identifizierungsmöglichkeit gemäß Abschnitt 2.3 die Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ verschwindet.

Mit $Z_{RC}(p) = Z_1(p)$ und $Z_{RL}(p) = Z_2(p)$ liefern die Gln. (40) und (41) unmittelbar die Zuordnungen

$$T_1(p) = 1 \quad ; \quad T_2(p) = p + (b_1 - \zeta_1) ;$$

$$B''_0 = P_2(-\zeta_1) ; \quad A''_0 = 1 .$$

Damit lauten die Matrixelemente der RC-Zweitore gemäß den Gln. (38a,b), (42), (43) und (44a,b):

$$-y_{12}^{(b)}(p) = K(a_2 p + \frac{a_0}{\zeta_1}) = K_2 S_2(p) , \quad (78)$$

$$y_{22}^{(b)}(p) = p + (b_1 - \zeta_1) , \quad (79)$$

$$-\frac{y_{12}^{(a)}(p)}{g_o^2} = K \frac{-g_{12} \tilde{P}_1(-\zeta_1) p}{g_o P_2(-\zeta_1) \zeta_1} = K_1 s_1(p) \quad (80)$$

und

$$\frac{y_{22}^{(a)}(p)}{g_o^2} = \frac{g_{12} g_{21} (p + \zeta_1)}{P_2(-\zeta_1)} \quad (81)$$

$$(K > 0, g_{12} < 0, g_{21} < 0).$$

Bei ungeradem Grad von $P_1(p)$ hat die Zählerzerlegung die Form ($a_o < 0$):

$$\begin{aligned} \frac{P_1(p)}{Q(p)} &= K \left[\frac{-\tilde{P}_1(-\zeta_1)}{\zeta_1} \cdot \frac{p}{p + \zeta_1} - \left(\frac{-a_o}{\zeta_1} \right) \right] \\ &= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_1(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_2(p)}. \end{aligned}$$

Die Erweiterungsfunktion $Z_o(p)$ verschwindet hier für die im Abschnitt 2.3 beschriebene zweite Identifizierungsmöglichkeit, und man muß in diesem Fall gemäß den Gln. (45a,b) und (51a,b) lediglich in der Beziehung (78) $a_2 = 0$ setzen. Im Gegensatz zu den Realisierungen mit geradem Grad von $P_1(p)$ besitzen diejenigen mit ungeradem Grad dieses Polynoms (d.h. mit einer einfachen, positiv reellen Übertragungsnullstelle) jedoch eine negative Übertragungskonstante K .

Es sei noch als Alternative eine RC-RL-Zerlegung des Zählers von $H(p)$ erwähnt, die allerdings nur dann angewandt werden kann, wenn zwei zueinander konjugiert komplexe Übertragungsnullstellen in der offenen linken p -Halbebene liegen. Dann kann der modifizierte Zähler auf die Form

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left[a_2 p + (a_1 - a_2 \zeta_1) - \frac{-\tilde{P}_1(-\zeta_1)}{p + \zeta_1} \right] \quad (82a)$$

$$= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1(p)} \quad (82b)$$

gebracht werden. Für alle positiven ζ_1 -Werte gilt $\tilde{P}_1(-\zeta_1) > 0$. Man erhält gemäß den Gln. (38a,b) und (44a,b) die Zuordnungen

$$-y_{12}^{(b)}(p) = K \left[a_2 p + (a_1 - a_2 \zeta_1) \right] \equiv K_2 S_2(p), \quad (83)$$

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_o^2} = K \frac{g_{12} \tilde{P}_1(-\zeta_1)}{g_o p_2 (-\zeta_1)} \equiv K_1 S_1(p) \quad (84)$$

$$(g_{12} > 0, g_{21} > 0, K > 0, \zeta_1 \leq \frac{a_1}{a_2}).$$

Der Gyrator ist hier also in Normalrichtung zu betreiben.

Falls für die Koeffizienten der Übertragungsfunktion $a_1 \neq b_1$ gilt, kann das Hilfspolynom $Q(p)$ nicht so gewählt werden, daß man sowohl minimale Nullstellen- als auch minimale Polempfindlichkeit bezüglich Änderungen der aktiven Parameter g_{21} bzw. $g_{12}g_{21}$ erhält [vgl. Teil I, Abschnitt 3.1].

Diese alternative Zerlegung hat den Vorteil, daß die Nullstellenempfindlichkeit in der Regel kleiner ist als bei der allgemeinen Zerlegung gemäß den Gln. (77a,b). Andererseits werden die in Frage kommenden speziellen Übertragungsfunktionen gewöhnlich durch Kettennetzwerke realisiert [vgl. Teil III].

Nähere Aussagen zur Festlegung der noch unbestimmten Parameter ϵ_1 , K und g_0 folgen im Abschnitt 3.3.

3.2.2. Übertragungsfunktionen mit negativ reellen Übertragungsnullstellen

Die Zählerzerlegungen für die folgenden Sonderfälle weichen zum Teil von der im Abschnitt 2.2 angegebenen Vorschrift ab. Dadurch kann man auch hier verschwindende Erweiterungsfunktionen $Z_0(p)$ und einen minimalen Netzwerkelementeaufwand erreichen. Da infolge $Z_0(p) \equiv 0$ die Nennerzerlegung von $H(p)$ nach 3.2.1 dieselbe bleibt, gelten auch in diesen Fällen die Gln. (79) und (81) für die Bestimmung der Admittanzmatrix-Elemente $y_{22}^{(a)}(p)$ und $y_{22}^{(b)}(p)$.

Die größte Bedeutung hat der Fall einer positiv reellen und einer negativ reellen Übertragungsnullstelle. Es gelten die Ungleichungen $a_2 > 0$, $a_1 \leq 0$, $a_0 < 0$. Folgende Zerlegungen des modifizierten Zählers der Übertragungsfunktion sind sinnvoll:

$$a) \quad \epsilon_1 \geq a_1/a_2$$

$$\frac{P_1(p)}{Q(p)} = K \left[a_2 p - \left[\frac{\tilde{P}_1(-\epsilon_1)}{\epsilon_1} \cdot \frac{p}{p + \epsilon_1} + \left(\frac{-a_0}{\epsilon_1} \right) \right] \right] \quad (85a)$$

$$= \frac{P_1^{(1)}(p)}{Q_2(p)} - \frac{P_1^{(2)}(p)}{Q_1(p)}, \quad (85b)$$

womit gemäß den Gln. (38a,b) und (44a,b)

$$-y_{12}^{(b)}(p) = K a_2 p \equiv K_2 S_2(p), \quad (86)$$

$$\frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_0} = K \frac{-g_{12} \left[(a_2 \epsilon_1 - a_1) p - a_0 \right]}{g_0 P_2(-\epsilon_1)} \equiv K_1 S_1(p) \quad (87)$$

folgt.

$$b) \zeta_1 \leq a_1/a_2$$

Hier erhält man formal die in den Gln. (82a,b), (83) und (84) stehenden Ergebnisse. Der Unterschied besteht darin, daß wegen $\tilde{P}_1(-\zeta_1) < 0$ negative Gyrationaleitwerte $g_{12} < 0$, $g_{21} < 0$ gewählt werden müssen, d.h. der Gyrtator in umgekehrter Richtung zu betreiben ist.

Liegen die Übertragungsnullstellen nur auf der negativ reellen p-Achse einschließlich $p=0$ und $p=\infty$, so wird man gewöhnlich die Realisierung mit Hilfe einer Kettenstruktur durchführen. Trotzdem sollen hier die Ergebnisse solcher Zerlegungen des modifizierten Zählers von $H(p)$ zusammengestellt werden, die zu einer verschwindenden Erweiterungsfunktion $Z_0(p)$ führen.

Für die Zählerkoeffizienten der Übertragungsfunktion gilt $a_2 \geq 0$, $a_1 > 0$, $a_0 \geq 0$. Bei der Synthese müssen wieder zwei Fälle unterschieden werden:

$$a) \tilde{P}_1(-\zeta_1) < 0$$

Die Ergebnisse weichen nur unwesentlich von denen des Abschnitts 3.2.1 für geraden Grad des Zählerpolynoms $P_1(p)$ ab. Entgegen den dortigen Resultaten muß lediglich $g_{12} > 0$, $g_{21} > 0$ gewählt werden, was eine Anordnung des Gyrtators in Normalrichtung bedeutet.

$$b) \tilde{P}_1(-\zeta_1) > 0$$

Hier erhält man eine vollständige Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Abschnitt 3.2.1 für geraden Grad von $P_1(p)$.

3.3. Optimierung der Übertragungskonstante bei gleichzeitiger Berücksichtigung endlicher Gyratorgüte

Der gegebene Gyrator sei verlustbehaftet und durch Gl. (23b) mit $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ darstellbar. Spaltet man die im Ersatzschaltbild des Gyrators an den Toren auftretenden ohmschen Querleitwerte von den Sekundärseiten der RC-Zweitore a und b ab (vgl. Teil I, Abschnitt 2.5), so erhält man Restzweitore, die noch übertragerfrei realisierbar sein sollen, d.h. die noch die Fialkow-Gerst-Bedingungen Gln. (2a,b,c) erfüllen sollen.

3.3.1. Übertragungsfunktionen ohne negativ reelle Nullstellen

Für die im Abschnitt 3.2.1 behandelten Fälle ergeben sich bei geradem Grad von $P_1(p)$ folgende Admittanzmatrix-Elemente der Restzweitore

$$y_{22}^{(bl)}(p) = p + b_1 - \zeta_1 - g_0 g_{22} , \quad (88a)$$

$$-y_{12}^{(bl)}(p) \equiv -y_{12}^{(b)}(p) = K a_2 p + K a_0 / \zeta_1 \quad (88b)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{y_{22}^{(al)}(p)}{g_0^2} &= \frac{g_{12} g_{21} (p + \zeta_1)}{P_2(-\zeta_1)} - \frac{g_{11}}{g_0} \\ &= \frac{g_{12} g_{21}}{P_2(-\zeta_1)} p + \left[\frac{g_{12} g_{21} \zeta_1}{P_2(-\zeta_1)} - \frac{g_{11}}{g_0} \right] , \end{aligned} \quad (89a)$$

$$\frac{-y_{12}^{(al)}(p)}{g_0^2} \equiv \frac{-y_{12}^{(a)}(p)}{g_0^2} = K \frac{-g_{12} \tilde{P}_1(-\zeta_1) p}{g_0 P_2(-\zeta_1) \zeta_1} . \quad (89b)$$

Aus der Forderung, daß die konstanten Glieder in den Gln. (88a) und (89a) nicht negativ werden dürfen, folgen die obere Grenze $g_0''(\zeta_1)$ und die untere Grenze $g_0'(\zeta_1)$ für den Parameter g_0 . Soll eine Reali-

sierung mit Verlustberücksichtigung überhaupt möglich sein, so muß für mindestens einen ζ_1 -Wert die Ungleichung

$$g''_0(\zeta_1) \geq g'_0(\zeta_1)$$

erfüllt sein. Diese führt zu einer Bedingung für das Minimum der Gyratorgüte $Q_G(\zeta_1)$. Dieses Minimum hat denselben Wert für alle in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 beschriebenen Fälle und entspricht bei geeigneter Wahl von ζ_1 den allgemeinen im Abschnitt 2.5 formulierten Aussagen. Insbesondere muß also die Ungleichung

$$Q_G \geq Q_P$$

gelten, wobei Q_P die Güte des Übertragungspols darstellt. Dabei ist im Extremfall $\zeta_1 = b_1/2$, d.h. die nach Calahan "optimale" Zerlegung zu wählen.

Prüft man die Fialkow-Gerst-Bedingungen bei beiden RC-Zweitoren, so erhält man drei Beziehungen für die oberen Grenzen der Übertragungskonstante K, aus denen schließlich das absolute Maximum von K bestimmt werden kann.

Gemäß den Gln. (88a,b) kommen als obere Grenzen für K

$$K_{M1} = \frac{1}{a_2} \quad , \quad (90a)$$

$$K_{M2} = \frac{(b_1 - \zeta_1 - g_0 g_{22}) \zeta_1}{a_0} \quad (90b)$$

und gemäß den Gln. (89a,b)

$$K_{M3} = - \frac{g_{21} g_0 \zeta_1}{\tilde{p}_1(-\zeta_1)} \quad (90c)$$

in Frage. Dabei muß nach Gl. (89a) als Nebenbedingung

$$g_0 \geq \frac{\varepsilon_{11} P_2 (-\zeta_1)}{\varepsilon_{12} \varepsilon_{21} \zeta_1} \quad (91)$$

beachtet werden. Die obere realisierbare Grenze für die Übertragungskonstante folgt dann aus

$$K = \text{Min} [K_{M1}, K_{M2}, K_{M3}] .$$

Zur Bestimmung des Maximums von K bezüglich der in Grenzen freien Parameter g_0 und ζ_1 sollen zuerst die zulässigen Gebiete $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ in einer (ζ_1, g_0) -Ebene ermittelt werden, für welche $K_{M2} < K_{M3}$ bzw. $K_{M3} < K_{M2}$ gilt.

Die zulässigen Werte der Parameter g_0 und ζ_1 sind für wachsende g_0 begrenzt durch die Forderung $K_{M2} \geq 0$ oder

$$g_0 \leq \frac{b_1 - \zeta_1}{\varepsilon_{22}} . \quad (92)$$

Für kleiner werdende $g_0 > 0$ wird durch Ungleichung (91) die untere Schranke bestimmt. Das entstehende einfach-zusammenhängende, endliche Gebiet in der (ζ_1, g_0) -Ebene ist im Bild 18 unschraffiert dargestellt.

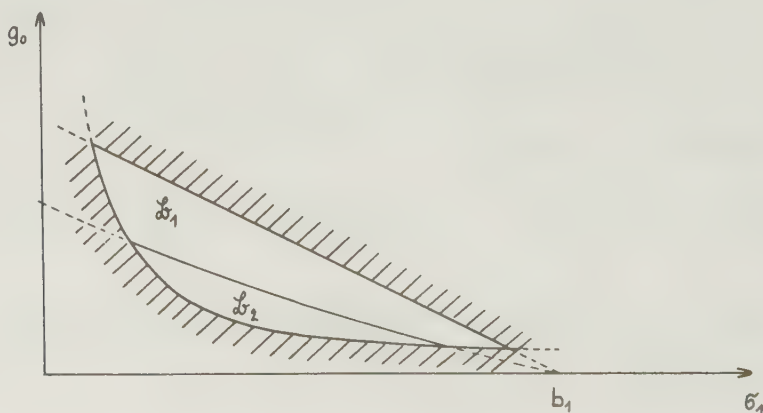


Bild 18: Zulässiger Bereich für die Parameter ζ_1 und g_0

Dabei ist zu bemerken, daß es bei unzureichender Gyratorgüte nicht existiert. Ist jedoch ein solches zulässiges Gebiet vorhanden, so zerfällt es in der Regel in die gesuchten zwei Teilgebiete, deren gemeinsame Grenzlinie durch $K_{M2} = K_{M3}$ festgelegt ist. Mit den Gl. (90b,c) kann die Grenzkurve folgendermaßen dargestellt werden:

$$g_0 = \frac{b_1 - \zeta_1}{g_{22} - g_{21} a_0 / \tilde{P}_1(-\zeta_1)} \quad (93)$$

Oberhalb von der im Bild 18 eingetragenen Kurve $K_{M2} = K_{M3}$ befindet sich das Teilgebiet $\mathcal{L}_1(K_{M2} < K_{M3})$, unterhalb davon das Teilgebiet $\mathcal{L}_2(K_{M3} < K_{M2})$.

Die Aufgabe besteht nun darin, im Gebiet $\mathcal{L}_1$ das Maximum von K_{M2} und im Gebiet $\mathcal{L}_2$ das Maximum von K_{M3} zu bestimmen. Wie man leicht feststellt, existieren jeweils innerhalb dieser Gebiete keine relativen Extrema. Die Maximalwerte müssen also auf den Rändern liegen.

Zur Bestimmung des Maximums von K_{M3} im Gebiet $\mathcal{L}_2$ sind zwei Ränder zu untersuchen. Berücksichtigt man, daß K_{M3} proportional g_0 wächst, so scheidet der untere Rand nach Ungleichung (91) sofort aus. Es bleibt die Grenzkurve gemäß Gl. (93). Setzt man diese in Gl. (90c) ein, so ergibt sich für K_{M3} auf dieser Kurve

$$K_{M3}(\zeta_1) = \frac{\zeta_1(b_1 - \zeta_1)}{a_0 - g_{22}\tilde{P}_1(-\zeta_1)/g_{21}} \quad (94)$$

Das Gebiet $\mathcal{L}_1$ ist nach oben durch die Gerade $g_0 = (b_1 - \zeta_1)/g_{22}$ begrenzt, auf der jedoch das Maximum von K_{M2} wegen $K_{M2} = 0$ nicht liegen kann. Ein weiterer Rand ist durch Ungleichung (91) gegeben. Die Größe K_{M2} entlang dieses Randes erhält man durch Einsetzen von Gl. (91) in Gl. (90b):

$$K_{M2}(\zeta_1) = \frac{\zeta_1(b_1 - \zeta_1)}{a_0} - \frac{g_{11}g_{22}P_2(-\zeta_1)}{g_{12}g_{21}a_0} \quad (95)$$

Der Funktionsverlauf auf der Grenze zum Gebiet $\mathcal{L}_2$ ist identisch mit K_{M3} Gl. (94).

Durch die erfolgte Elimination des Parameters g_0 können nun die Größen K_{M1} , $K_{M2}(\zeta_1)$ und $K_{M3}(\zeta_1)$ über der Variablen ζ_1 in einfacher Form gemäß Bild 19 dargestellt werden. Hier läßt sich bereits anschaulich ohne große Schwierigkeiten der optimale Wert ζ_1 bestimmen, aus dem je nach der zuständigen Kurve K_{M1} , $K_{M2}(\zeta_1)$ oder $K_{M3}(\zeta_1)$ der zugehörige g_0 -Wert ermittelt werden kann.

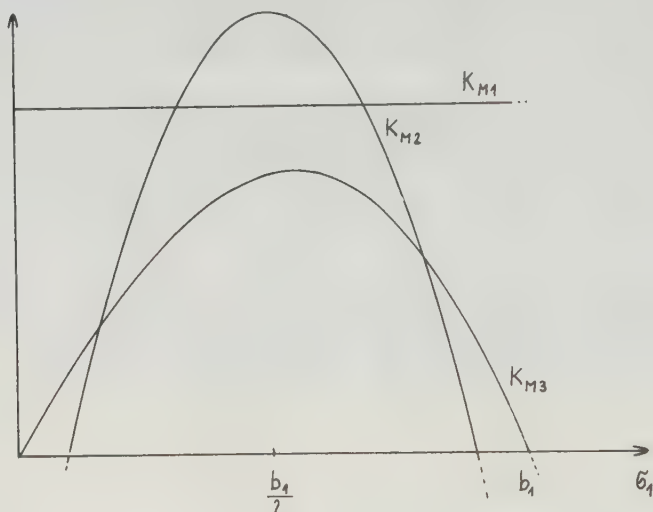


Bild 19: Kurven zur Bestimmung der maximalen Übertragungskonstante

Wie man den Gln. (94) und (95) entnimmt, verlaufen die Kurven $K_{M2}(\zeta_1)$ und $K_{M3}(\zeta_1)$ für kleine Werte von $g_{11} > 0$ und $g_{22} > 0$ ähnlich. Das Maximum von $K_{M2}(\zeta_1)$ läßt sich leicht berechnen, es tritt bei $\zeta_1 = b_1/2$ auf. Man erhält damit als eine absolute Schranke (die nicht erreichbar sein muß) für die Übertragungskonstante K

$$K \leq K_{M2}(b_1/2) = \frac{b_1^2/4 - (b_0 - b_1^2/4)/(4Q_G^2 - 1)}{a_0}$$

$$= \frac{g_{11}g_{22}b_1^2}{g_{12}g_{21}a_0} [Q_G^2 - Q_P^2] . \quad (96)$$

Ist der Grad des Zählerpolynoms einer gemäß 3.2.1 eingeschränkten Übertragungsfunktion ungerade, d.h. besitzt $P_1(p)$ ausschließlich eine positiv reelle Übertragungsnullstelle, so ändern sich die bisherigen Betrachtungen und Ergebnisse nur unwesentlich. In den Formeln sind lediglich die Größen K , K_{M2} , K_{M3} , a_0 und $\tilde{P}_1(p)$ durch $-K$, $-K_{M2}$, $-K_{M3}$, $-a_0$ bzw. $-\tilde{P}_1(p)$ zu substituieren. Die Konstante K_{M1} wird unendlich groß und kann daher entfallen.

3.3.2. Übertragungsfunktionen mit Nullstellen auf der negativ reellen p-Achse

Zunächst wird die Übertragungskonstante K von Übertragungsfunktionen mit einer positiv und einer negativ reellen Nullstelle untersucht. Das nach der Abspaltung der Verlustleitwerte g_0g_{11} und g_0g_{22} des Gyrators verbleibende Restzweitor hat gemäß Abschnitt 3.2.2 und den Gln. (88a), (89a) bestimmte Admittanzmatrix-Elemente. Zu ihrer Angabe werden folgende Fälle unterschieden:

$$a) \quad \epsilon_1 \geq a_1/a_2$$

Hier erhält man

$$y_{22}^{(b)}(p) = p + b_1 - \epsilon_1 - g_0g_{22} , \quad (97a)$$

$$-y_{12}^{(b)}(p) = Ka_2p \quad (97b)$$

und

$$\frac{y_{22}^{(a1)}(p)}{g_o^2} = \frac{g_{12}g_{21}}{p_2(-\zeta_1)} p + \frac{g_{12}g_{21}\zeta_1}{p_2(-\zeta_1)} - \frac{g_{11}}{g_o} \quad , \quad (98a)$$

$$\frac{-y_{12}^{(a1)}(p)}{g_o^2} = K \frac{-g_{12}(a_2\zeta_1 - a_1)}{g_o p_2(-\zeta_1)} p + K \frac{a_o g_{12}}{g_o p_2(-\zeta_1)} \quad . \quad (98b)$$

Die Prüfung der Fialkow-Gerst-Bedingungen an diesen Restzweitoren führt wieder zu drei Schranken K_{M1} , K_{M2} , K_{M3} für die Übertragungskonstante K , die von ζ_1 und g_o abhängen und von denen jeweils die kleinste die obere Grenze für K darstellt:

$$K \leq \text{Min} [K_{M1}, K_{M2}, K_{M3}] \quad . \quad (99)$$

Aus den Gln. (97a,b) folgt

$$K_{M1} = \frac{1}{a_2}$$

und die obere Schranke für g_o

$$g_o \leq \frac{b_1 - \zeta_1}{g_{22}} \quad . \quad (100)$$

Aus den Gln. (98a,b) erhält man

$$K_{M2} = \frac{-g_{21}g_o}{a_2\zeta_1 - a_1} \quad (101a)$$

und

$$K_{M3} = \frac{g_{21}\zeta_1}{a_o} \left[g_o - \frac{g_{11}p_2(-\zeta_1)}{g_{12}g_{21}\zeta_1} \right] \quad . \quad (101b)$$

Die Bereichsgrenzen für zulässige Werte von g_o und ζ_1 sind infolge

der unveränderten Zerlegung des Nenners von $H(p)$ gegenüber den bereits behandelten Fällen ebenfalls unverändert geblieben im Gegensatz zu den Grenzen zwischen den Gebieten $\mathcal{L}_1 (K_{M2} < K_{M3})$ und $\mathcal{L}_2 (K_{M3} < K_{M2})$. Für die Grenzkurve folgt aus $K_{M2} = K_{M3}$

$$g_0 = \frac{g_{11} p_2(-\tilde{g}_1)}{g_{12} g_{21} \tilde{g}_1} \left[1 + \frac{-a_0}{\tilde{p}_1(-\tilde{g}_1)} \right].$$

Die Gebietsgrenzen von $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ sind im Bild 20 für $\tilde{g}_1 \cong a_1/a_2$ dargestellt.

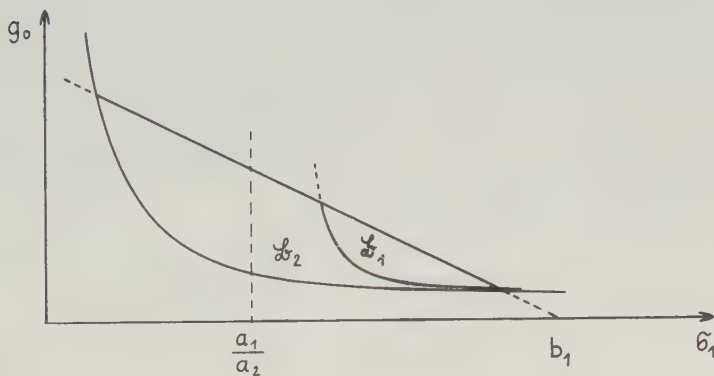


Bild 20: Zulässiger Bereich für die Parameter $\tilde{g}_1$ und g_0 im Fall a)

Da sowohl K_{M2} als auch K_{M3} mit wachsenden Werten von g_0 und $\tilde{g}_1 = \text{const}$ größer werden, ist die Grenzkurve $K_{M2} = K_{M3}$ nur insofern interessant, als Schnittpunkte mit der den Parameter g_0 nach oben begrenzenden Randkurve $g_0 = (b_1 - \tilde{g}_1)/g_{22}$ vorhanden sind. Auf dieser

Randkurve werden die Größen K_{M2} und K_{M3} sicher maximal. Man erhält dort mit den Gln. (100) und (101a,b)

$$K_{M2}(\xi_1) = \frac{-g_{21}(b_1 - \xi_1)}{g_{22}(a_2 \xi_1 - a_1)} \quad (102a)$$

und

$$K_{M3}(\xi_1) = \frac{g_{21}}{g_{22}a_o} \xi_1 (b_1 - \xi_1) - \frac{g_{11}}{g_{12}a_o} P_2 (-\xi_1) . \quad (102b)$$

Das Maximum von K_{M3} liegt bei $\xi_1 = b_1/2$ und lautet

$$K_{M3}\left(\frac{b_1}{2}\right) = \frac{g_{11}b_1^2}{g_{12}a_o} \left[Q_G^2 - Q_P^2 \right] . \quad (103)$$

Dieser Wert stellt die.(nicht immer erreichbare) obere Grenze für die Übertragungskonstante K im Intervall $a_1/a_2 \leq \xi_1 < b_1$ dar. Im Bild 21 sind die interessierenden Kurven $K_{M2}(\xi_1)$ und $K_{M3}(\xi_1)$ rechts von der Stelle $\xi_1 = a_1/a_2$ dargestellt.

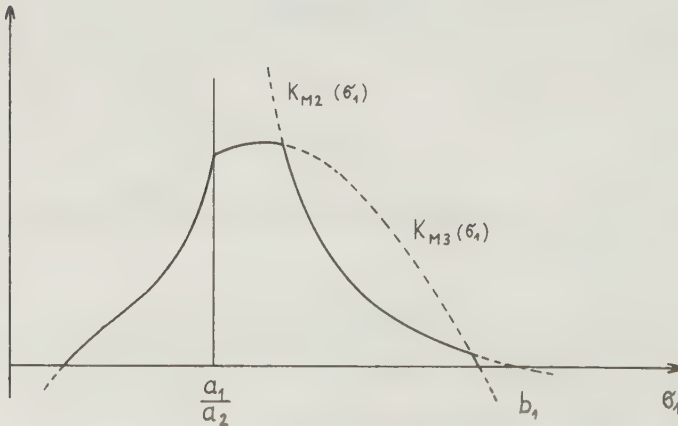


Bild 21: Kurven zur Bestimmung der maximalen Übertragungskonstante

$$b) \quad \epsilon_1 \leq a_1/a_2$$

Die Matrixelemente $y_{22}^{(b1)}(p)$ und $y_{22}^{(a1)}(p)/g_0^2$ bleiben unverändert.
Es ändern sich jedoch gemäß Abschnitt 3.2.2

$$-y_{12}^{(b1)}(p) = Ka_2 p + K(a_1 - a_2 \epsilon_1) \quad (104a)$$

und

$$\frac{-y_{12}^{(a1)}(p)}{g_0^2} = \frac{g_{12}g_{21}}{P_2(-\epsilon_1)} p + \frac{g_{12}g_{21}\epsilon_1}{P_2(-\epsilon_1)} - \frac{g_{11}}{g_0} \quad (104b)$$

Die Prüfung dieser Admittanzmatrix-Elemente der Restzweitere a_1 und b_1 hinsichtlich der Erfüllung der Fialkow-Gerst-Bedingungen ergibt die folgenden Funktionen, die als obere Grenze für die Übertragungskonstante K in Frage kommen:

Gemäß den Gln. (97a) und (104a)

$$K_{M1} = \frac{1}{a_2} \quad ,$$

$$K_{M2} = \frac{b_1 - \epsilon_1 - g_0 g_{22}}{a_1 - a_2 \epsilon_1} \quad (105a)$$

und gemäß den Gln. (98a) und (104b)

$$K_{M3} = \frac{g_{21}\epsilon_1}{P_1(-\epsilon_1)} \left[g_0 - \frac{g_{11}P_2(-\epsilon_1)}{g_{12}g_{21}\epsilon_1} \right] \quad (105b)$$

Wie zu erwarten war, sind auch hier die Bereichsgrenzen für die zulässigen Werte von ϵ_1 und g_0 dieselben. Es muß lediglich die Grenze zwischen den Gebieten $\mathcal{L}_1(K_{M2} < K_{M3})$ und $\mathcal{L}_2(K_{M3} < K_{M2})$ neu bestimmt werden. Aus $K_{M2} = K_{M3}$ folgt nach kurzer Rechnung mit den Gln. (105a, b)

Die Funktion $K_{M2}(\zeta_1) = K_{M5}(\zeta_1)$ Gl. (107) ist im Bild 21 ($\zeta_1 \leq a_1/a_2$) eingetragen. Sie schließt stetig an die Kurve für den Maximalwert von K im Intervall $a_1/a_2 \leq \zeta_1 < b_1$ an. Wünscht man eine Realisierung mit maximaler Übertragungskonstante, so sind die zu dem höchsten Punkt der im Bild 21 durchgezogen gezeichneten Kurve gehörigen Werte der Parameter ζ_1 und g_0 zu ermitteln und zu verwenden.

Man kann zeigen, daß die durch Gl. (103) gegebene Schranke für K auch für $\zeta_1 \leq a_1/a_2$ gilt und nur dann erreicht werden kann, wenn $b_1/2 = a_1/a_2$ gegeben ist und $\zeta_1 = b_1/2$ gewählt wird.

Zur Optimierung der Übertragungskonstante bei Übertragungsfunktionen, die nur negativ reelle Nullstellen besitzen, kann das bereits beschriebene Verfahren verwendet werden, das für Übertragungsfunktionen mit konjugiert komplexen Nullstellen geeignet ist. Dabei müssen bis zu drei Intervalle für ζ_1 getrennt betrachtet werden. Für $P_1(-\zeta_1) > 0$ besteht kein Unterschied zu der geschilderten Optimierung, für $P_1(-\zeta_1) < 0$ muß lediglich $g_{12} > 0$ und $g_{21} > 0$ angenommen werden. Dies bedeutet eine Umkehrung des Gytrators, also den Betrieb in Normalrichtung. Falls $g_{12} \neq g_{21}$ ist, müssen daher auch die Zahlenwerte dieser Elemente vertauscht werden.

3.4. Berechnung der Pol- und Nullstellenempfindlichkeiten bezüglich der Parameter des Gytrators

3.4.1. Nullstellenempfindlichkeit eines Polynoms

Wenn neben der Verlustkompensation nicht die größtmögliche Übertragungskonstante K gefordert wird, sind in der Wahl der Größen ζ_1 und g_0 noch gewisse Freiheiten innerhalb des im letzten Abschnitt beschriebenen zulässigen Gebietes möglich.

Im folgenden werden die Pol- und Nullstellenempfindlichkeiten der Übertragungsfunktion gegenüber Änderungen der Admittanzmatrix-Elemente des Gytrators untersucht. Damit soll der Anwender in die Lage versetzt werden, bei der Festlegung der freien Parameter unter Beachtung der bisherigen Gesichtspunkte und der folgenden Ergebnisse

einen Kompromiß zu finden und extreme Empfindlichkeiten zu vermeiden.

Betrachtet man einen Netzwerkparameter v als variabel, so läßt sich die Übertragungsfunktion des analysierten Netzwerks in der Form

$$\begin{aligned} H(p, v) &= \frac{P_1(p, v)}{P_2(p, v)} \\ &= \frac{P_{10}(p) + v P_{1v}(p)}{P_{20}(p) + v P_{2v}(p)} \end{aligned} \quad (108)$$

darstellen [14]. Deshalb interessiert im weiteren insbesondere die Nullstellenempfindlichkeit eines Polynoms

$$\begin{aligned} P(p) &= N \prod_i (p - p_i) = P_0(p) + v P_v(p) \\ (N &= \text{const}) \end{aligned} \quad (109)$$

bezüglich Änderungen des Parameters v . Diese Nullstellenempfindlichkeit ist definiert durch [vgl. Teil I, Abschnitt 3.1]

$$S_v^{p_i} = \frac{\partial p_i}{\partial v} \cdot \frac{v}{p_i} \quad (110)$$

Schreibt man für den variablen Parameter

$$\tilde{v} = v + \Delta v,$$

so folgt aus Gl. (109)

$$(N + \Delta N) \prod_i (p - p_i - \Delta p_i) = P_0(p) + (v + \Delta v) P_v(p).$$

Aus dieser Beziehung geht nach kurzer Rechnung für $\Delta v \rightarrow 0$ die Empfindlichkeit

$$S_v = \frac{-v P_v(p_1)}{p_1 P'(p_1)} \quad (111)$$

mit $P'(p) = dP(p)/dp$ hervor.

3.4.2. Die Empfindlichkeit der Pole der Übertragungsfunktion

Da die Zerlegung des modifizierten Nenners $P_2(p)/Q(p)$ der im Abschnitt 3.1 eingeführten Übertragungsfunktion für alle im Abschnitt 3.3 behandelten Fälle dieselbe ist, kann für die Pole von $H(p)$ eine allgemeingültige Empfindlichkeitsbetrachtung durchgeführt werden.

Im folgenden werden die variablen Matrixelemente des Gytrators wie der oben genannte Parameter v durch eine Tilde gekennzeichnet. Mit den Admittanzmatrix-Elementen der RC-Zweitore $y_{22}^{(b)}(p)$ Gl. (79) und $y_{22}^{(a)}(p)/g_0^2$ Gl. (81) folgt als analysiertes Nennerpolynom von $H(p)$ gemäß Gl. (28)

$$P_2(p) = p^2 + b_1 p + b_0 - P_2(-\zeta_1) + \frac{\tilde{g}_{12}}{g_{12}} P_2(-\zeta_1).$$

Der Betrag der Polempfindlichkeit bezüglich des Parameters g_{12} lautet daher nach Gl. (111)

$$\left| S_{g_{12}}^{p_1} \right| = \frac{P_2(-\zeta_1)}{2 \sqrt{b_0(b_0 - b_1^2/4)}} \quad (112)$$

Das Minimum liegt bei $\zeta_1 = b_1/2$, was der nach Calahan "optimalen" Zerlegung des Nenners der Übertragungsfunktion entspricht [vgl. Teil I, 3.1]. Man erkennt sofort, daß

$$\left| S_{g_{21}}^{p_1} \right| = \left| S_{g_{12}}^{p_1} \right|$$

gelten muß.

Zur Bestimmung der Polempfindlichkeiten bezüglich der Parameter g_{11} und g_{22} müssen die Gln. (88a) und (89a) herangezogen werden. Nach Gl. (28) ergibt die Analyse für das Polynom $P_2(p)$ bei variablem g_{11} :

$$P_2(p) = p^2 + p \left(b_1 - \frac{g_{11} P_2(-\zeta_1)}{g_o g_{12} g_{21}} \right) + P_2(-\zeta_1) - \frac{g_{11} P_2(-\zeta_1) (b_1 - \zeta_1)}{g_o g_{12} g_{21}} + \frac{\tilde{g}_{11} P_2(-\zeta_1)}{g_o g_{12} g_{21}} (p + b_1 - \zeta_1) .$$

Daraus folgt für den Betrag der Polempfindlichkeit bezüglich des aktiven Parameters g_{11} :

$$\begin{aligned} \left| s_{g_{11}}^{p_1} \right| &= \left| \frac{-g_{11} P_2(-\zeta_1) (p_1 + b_1 - \zeta_1)}{g_o g_{12} g_{21} p_1 P_2'(p_1)} \right| \\ &= \frac{g_{11} [P_2(-\zeta_1)]^{3/2}}{g_o g_{12} g_{21} 2 \sqrt{b_o (b_o - b_1^2/4)}} . \end{aligned} \quad (113)$$

Zur Erlangung einer möglichst kleinen Empfindlichkeit muß die Größe g_o (bei festem ζ_1) möglichst groß gewählt werden. Das Empfindlichkeitsminimum erreicht man daher auf der oberen Randkurve des zulässigen Bereichs in der (ζ_1, g_o) -Ebene

$$g_o = \frac{b_1 - \zeta_1}{g_{22}} \quad [\text{vgl. Abschnitt 3.3}] .$$

Es liegt immer bei ζ_1 -Werten, die kleiner als $b_1/2$ sind. Die Polempfindlichkeit bezüglich g_{22} läßt sich ausgehend von der folgenden

Darstellung des Nennerpolynoms von $H(p)$ bestimmen:

$$P_2(p) = p^2 + p(b_1 - g_0 g_{22}) + b_0 - \zeta_1 g_0 g_{22} + \tilde{g}_{22} g_0 (p + \zeta_1).$$

Die Empfindlichkeit lautet dem Betrage nach mit Gl. (111)

$$\left| \frac{p_i}{s_{g_{22}}} \right| = \frac{g_{22} g_0 \sqrt{P_2(-\zeta_1)}}{2 \sqrt{b_0 (b_0 - b_1^2/4)}} \quad (114)$$

Hier erhält man im Gegensatz zu Gl. (113) minimale Empfindlichkeit für möglichst kleine Werte von $g_0 > 0$, d.h. auf der unteren Randkurve des zulässigen Bereichs in der (ζ_1, g_0) -Ebene.

Das Produkt

$$\left| \frac{p_i}{s_{g_{11}}} \right| \left| \frac{p_i}{s_{g_{22}}} \right| = \frac{g_{11} g_{22} P_2^2(-\zeta_1)}{4 g_{12} g_{21} b_0 (b_0 - b_1^2/4)}$$

ist von g_0 unabhängig und erreicht sein Minimum bei $\zeta_1 = b_1/2$. Es hat den Wert

$$\left| \frac{p_i}{s_{g_{11}}} \right| \left| \frac{p_i}{s_{g_{22}}} \right| \Big|_{\zeta_1 = b_1/2} = \frac{1}{16 Q_P^2} \cdot \frac{4 Q_P^2 - 1}{4 Q_G^2 - 1}.$$

3.4.3. Die Empfindlichkeit der Nullstellen der Übertragungsfunktion

Zur Nullstellenempfindlichkeit der Übertragungsfunktion seien wegen der Vielzahl der Fälle nur Angaben bezüglich Änderungen des Parameters g_{21} gemacht. Zunächst werden die Realisierungen betrachtet, die aufgrund von Zählerzerlegungen nach den Gln. (78), (80) und (81) zustande

gekommen sind. Mit Gl. (28) erhält man die Analyse

$$P_1(p) = K \left[a_2 p^2 + p(a_2 \zeta_1 + \frac{a_0}{\zeta_1}) + a_0 - \frac{\tilde{g}_{21}}{g_{21}} \frac{P_1(-\zeta_1)}{K \zeta_1} p \right]$$

und daraus gemäß Gl. (111) den Betrag der Nullstellenempfindlichkeit

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1}{s_{g_{21}}} \right| &= \left| \frac{\tilde{P}_1(-\zeta_1) p_1}{\zeta_1 p_1 P'_1(p_1)} \right| \\ &= \frac{\tilde{P}_1(-\zeta_1) a_2}{2 \zeta_1 \left| \sqrt{a_1^2/4 - a_0 a_2} \right|} \quad . \end{aligned} \quad (115)$$

Das Minimum wird für die Wahl $\zeta_1 = \sqrt{a_0}$ erreicht. Falls sich die Werte von $\sqrt{a_0}$ und $b_1/2$ stark voneinander unterscheiden, entsteht hier bei der Dimensionierung des Parameters ζ_1 häufig eine Diskrepanz zwischen möglichst kleiner Nullstellenempfindlichkeit einerseits und maximaler Übertragungskonstante mit minimaler Polempfindlichkeit andererseits.

An zweiter Stelle seien die Realisierungen betrachtet, deren Admittanzmatrix-Elemente $y_{12}^{(b)}(p)$ und $y_{12}^{(a)}(p)/g_0^2$ nach den Gln. (83) bzw. (84) bestimmt wurden. Mit Gl. (28) erhält man die Analyse

$$P_1(p) = K \left[a_2 p^2 + a_1 p + \zeta_1 (a_1 - a_2 \zeta_1) + \frac{\tilde{g}_{21}}{g_{21}} \left[a_0 - \zeta_1 (a_1 - a_2 \zeta_1) \right] \right] .$$

Die Nullstellenempfindlichkeit bezüglich g_{21} läßt sich betragsmäßig nach Gl. (111) unmittelbar angeben als

$$\left| \frac{p_1}{s_{g_{21}}} \right| = \left| \frac{\tilde{P}_1(-\zeta_1) a_2}{2 p_1 \sqrt{a_1^2/4 - a_0 a_2}} \right| \quad . \quad (116)$$

Das Minimum dieser Empfindlichkeit wird erreicht für $\zeta_1 = a_1/(2a_2)$.

Schließlich verbleiben noch diejenigen Realisierungen, deren Admittanzmatrix-Elemente $y_{12}^{(b)}(p)$ und $y_{12}^{(a)}(p)/g_0^2$ mit Hilfe der Gln. (86) und (87) ermittelt wurden. Setzt man diese Elemente in Gl. (28) ein, so liefert die Analyse

$$P_1(p) = K \left[a_2 p^2 + a_2 \zeta_1 p - \frac{\tilde{g}_{21}}{g_{21}} \left[(a_2 \zeta_1 - a_1)p - a_0 \right] \right]$$

$$(a_2 \zeta_1 \geq a_1, a_0 < 0).$$

Zur Berechnung der Nullstellenempfindlichkeit wird wieder Gl. (111) herangezogen. Der Betrag wird

$$\left| \frac{p_1}{s_{g_{21}}} \right| = \left| \frac{a_2 \left[(a_2 \zeta_1 - a_1)p_1 - a_0 \right]}{p_1 \sqrt{a_1^2/4 - a_0 a_2}} \right|.$$

Das Minimum liegt für die positiv reelle Übertragungsnullstelle p_1 bei $\zeta_1 = a_1/a_2$ und für die negativ reelle Übertragungsnullstelle p_2 beim größten zulässigen Wert von ζ_1 mit der Nebenbedingung

$$\zeta_1 \leq \frac{a_0}{a_2 p_2} + \frac{a_1}{a_2}.$$

Zusammenfassend kann man feststellen, daß sich bei gegebenen Gyratorverlusten die Vorschriften für den freien Parameter ζ_1 hinsichtlich maximaler Übertragungskonstante und minimaler Polempfindlichkeit in vielen Fällen nicht oder nur unwesentlich widersprechen. Die Forderung lautet $\zeta_1 \approx b_1/2$. Dazu wird der passende Parameter g_0 im allgemeinen nach Abschnitt 3.3 bestimmt. Minimale Nullstellenempfindlichkeit erfordert meist eine abweichende Dimensionierung. In der Regel muß ein Kompromiß geschlossen werden.

3.5. Ein Beispiel zur Realisierung einer Übertragungsfunktion zweiten Grades

Beispiel 4

Es werde eine Realisierung der Übertragungsfunktion

$$H(p) = K \frac{p^2 - 1,986855 p + 150,400}{p^2 + 6,39151 p + 59,0331}$$

gewünscht. Sie besitzt zwei zueinander konjugiert komplexe Übertragungsnullstellen in der rechten p-Halbebene und kann daher nur mit erheblichem Mehraufwand durch eine Kettenstruktur realisiert werden [6]. Der zur Verfügung stehende nicht-ideale Gyrator besitze die Admittanzmatrix

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0,005 & -1 \\ 1 & 0,005 \end{bmatrix},$$

woraus sich als Güte gemäß Gl. (27) der Wert $Q_G \approx 100$ ergibt. Demgegenüber hat die Polgüte den Wert $Q_P \approx 1,919$, so daß eine Realisierung mit Verlustberücksichtigung jedenfalls möglich sein muß.

Die Parameter ζ_1 und g_0 sollen so gewählt werden, daß einerseits die Übertragungskonstante möglichst groß wird und andererseits die Pol- und Nullstellenempfindlichkeit von $H(p)$ gegen Änderungen von g_{12} bzw. g_{21} möglichst klein wird.

Der erste Gesichtspunkt führt nach dem im Abschnitt 3.3 dargelegten Optimierungsverfahren (vgl. Bild 19) zu der Wahl $\zeta_1 \approx b_1/2 \approx 3,196$ mit der (maximalen) Übertragungskonstante $K = K_{M3}(b_1/2) \approx 0,0675$.

Durch diese Festlegung würde auch die Polempfindlichkeit minimal werden. Eine Berechnung nach Gl. (112) liefert den Betrag

$$\left| \frac{p_{\infty 1}}{s_{g_{12}}} \right| = 0,454697.$$

Die minimale Nullstellenempfindlichkeit von $H(p)$ würde sich nach

den Untersuchungen im Abschnitt 3.4.3 für $\zeta_1 = \sqrt{a_0} \approx 12,26$ ergeben. Diese Empfindlichkeit weist daher bei der Wahl $\zeta_1 = b_1/2$ keinen günstigen Wert auf. Nach Gl. (115) erhält man

$$\left| \frac{p_{01}}{s_{g_{21}}} \right| = 2,13708.$$

Der starke Unterschied zwischen Pol- und Nullstellenempfindlichkeit wird durch eine Vergrößerung des Parameters ζ_1 auf den Wert $\zeta_1 = 4,98394$ ein wenig ausgeglichen. Die nochmalige Berechnung aller interessierenden Größen ergibt

$$\left| \frac{p_{\infty 1}}{s_{g_{12}}} \right| = 0,484478,$$

$$\left| \frac{p_{01}}{s_{g_{21}}} \right| = 1,51953$$

und mit den Gln. (94) und (93)

$$K = K_{M3}(4,98394) = 0,0463588,$$

$$g_0 = 1,722122 .$$

Die Polempfindlichkeit wird nur unwesentlich größer, während die Nullstellenempfindlichkeit durch diese Maßnahme merklich verkleinert wird. Ein Nachteil ist die erhebliche Verkleinerung der Übertragungskonstante K.

Die Admittanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore lassen sich durch Einsetzen aller nun bekannten Daten aus den Gln. (78), (79), (80) und (81) berechnen:

$$-y_{12}^{(b)}(p) = 0,0463588 p + 1,39896 ,$$

$$y_{22}^{(b)}(p) = p + 1,40758 ,$$

$$-y_{12}^{(a)}(p) = 0,0570132 p$$

und

$$y_{22}^{(a)}(p) = 0,0570132 (p + 4,98394) .$$

Die Realisierung der RC-Zweitore a und b erfolgt durch Abzweignetze-
werke. Das resultierende Gesamtzweitor ist im Bild 23 dargestellt.

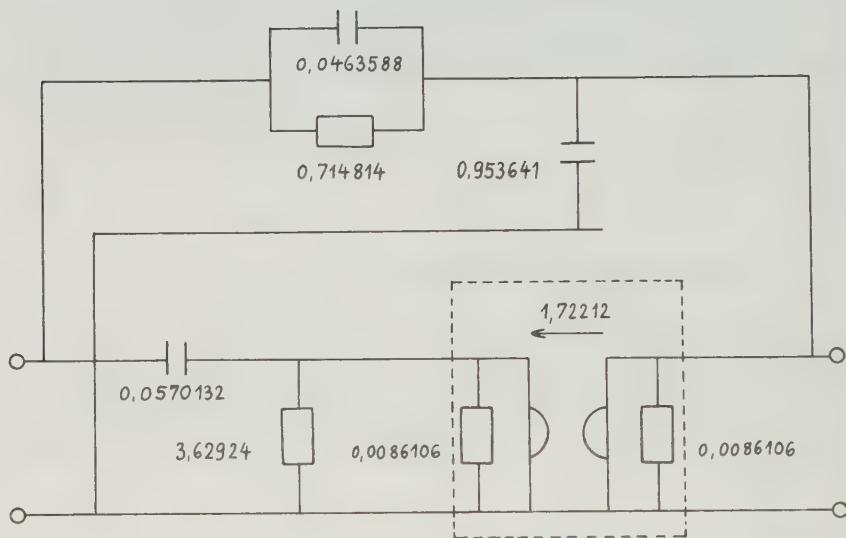


Bild 23: Gesamtnetzwerk zu Beispiel 4

III. Realisierung von Übertragungsfunktionen durch eine Gyrator-RC-Kettenstruktur

1. Vorbemerkungen, Analyse der Netzwerkstruktur

Wie in der Einführung bereits erwähnt wurde, verwendete I.M. Horowitz erstmals die im Bild 24 dargestellte Netzwerkstruktur zur Realisierung einer einfachen Übertragungsfunktion zweiten Grades. Als nicht-idealer Gyrator diente ein einstufiger Transistorverstärker.

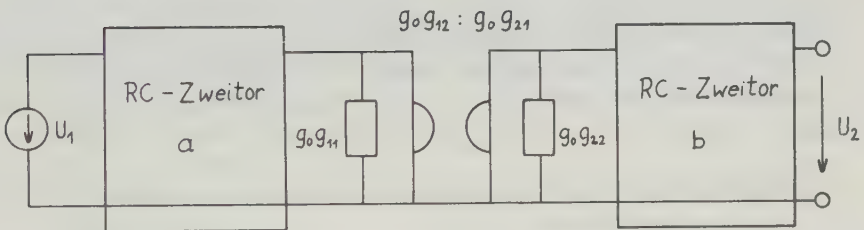


Bild 24: Die der Synthese zugrunde liegende Gyrator-RC-Kettenstruktur

Das Kettennetzwerk Bild 24 wurde inzwischen noch von anderen Autoren untersucht [3,5,6,15,16] .

Die nächsten Abschnitte enthalten zunächst das allgemeine Syntheseverfahren für Übertragungsfunktionen beliebigen Grades und einige Hinweise zur Verlustberücksichtigung bei Verwendung nicht-idealer Gyratoren. Ein weiterer wesentlicher Teil ist der Optimierung der Übertragungskonstanten von Realisierungen zweiten Grades gewidmet. Dabei müssen je nach der Lage der Übertragungsnullstellen verschiedene Fälle unterschieden werden.

Das folgende Verfahren steht in Konkurrenz zu dem im Teil II der vorliegenden Arbeit beschriebenen, wenn keine Übertragungsnullstellen in der offenen rechten p-Halbebene liegen. Seine Vorteile bestehen darin, daß die Übertragungsnullstellen des Gesamtzweitores durch diejenigen der passiven RC-Zweitore gebildet werden und daher von den Gyratordaten unabhängig sind.

Die Analyse des im Bild 24 dargestellten Zweitores ergibt das Spannungsverhältnis

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = \frac{-y_{12}^{(a)}(p) g_o g_{21} z_{12}^{(b)}(p)}{y_{22}^{(a)}(p) + g_o^2 g_{12} g_{21} z_{11}^{(b)}(p)} \quad . \quad (117)$$

Die Funktionen $y_{12}^{(a)}(p)$, $y_{22}^{(a)}(p)$ und $z_{12}^{(b)}(p)$, $z_{11}^{(b)}(p)$ sind dabei die Admittanzmatrix- bzw. Impedanzmatrix-Elemente der RC-Zweitore a bzw. b. Für die Darstellung des Verfahrens ist es wieder zweckmäßig, das Impedanzniveau des Gyrators durch Einführung des Faktors $1/g_o$ beweglich zu machen.

2. Synthese einer Übertragungsfunktion beliebigen Grades mit reellen und komplexen Polen

Die Form der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion ist im Teil II, Abschnitt 2 Gl. (29) angegeben. Die dort genannten Bedingungen sind durch die Forderung zu ergänzen, daß die Übertragungsnullstellen in der abgeschlossenen linken p-Halbebene liegen sollen, da sonst eine Realisierung mit durchgehender Kurzschlußverbindung sehr aufwendig bzw. unmöglich wird. Die gegebene Übertragungsfunktion wird ähnlich wie im Teil II unter Verwendung des bei der Nennerzerlegung von $H(p)$ entstehenden Hilfspolynoms so umgestaltet, daß aus ihr durch einen Vergleich mit der analysierten Übertragungsfunktion Gl. (117) die gesuchten Matrixelemente der RC-Zweitore bestimmt werden können.

2.1. Umformung der vorgeschriebenen Übertragungsfunktion und Bestimmung der Matrixelemente der RC-Zweitore

Die vorläufige Zerlegung des modifizierten Nenners der Übertragungsfunktion $P_2(p)/Q(p)$ kann einschließlich der Bezeichnungen aus Teil II, Abschnitt 2.1 Gl.n. (31a,b), (32a,b,c) und (33) übernommen werden. Demgemäß müssen die Übertragungspole auch hier die Winkelbedingung Gl. (22) erfüllen. Betrachtet man die gemäß Gl. (32c) in vereinfachter Form dargestellte Nennerzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{P_2(p)}{Q(p)} &= B'_0 \frac{D_1(p)}{Q_1(p)} + A'_0 \frac{D_2(p)}{Q_2(p)} \\ &= Z_1(p) + Z_2(p) \end{aligned}$$

und trifft die Zuordnungen

$$z_{11}^{(b)}(p) = \frac{1}{g_0 g_{12} g_{21}} [Z_1(p) + Z_0(p)] , \quad (118)$$

$$y_{22}^{(a)}(p) = Z_2(p) - Z_0(p) , \quad (119)$$

so scheint auf den ersten Blick die folgende Faktorisierung des modifizierten Zählers von $H(p)$ und die resultierende Zuordnung der Faktoren zu den gesuchten Matrixelementen bei der Wahl $Z_0(p) \equiv 0$ richtig zu sein:

$$\begin{aligned} \frac{P_1(p)}{Q(p)} &= \underbrace{\frac{g_0 g_{21} K_2 P_1^{(b)}(p)}{Q_1(p)}} \cdot \underbrace{\frac{K_1 P_1^{(a)}(p)}{Q_2(p)}} \\ &= g_0 g_{21} z_{12}^{(b)}(p) \left[-y_{12}^{(a)}(p) \right] . \end{aligned} \quad (120)$$

Die Koeffizienten bei der höchsten Potenz der reellen Polynome $P_1^{(a)}(p)$ und $P_1^{(b)}(p)$ seien gleich Eins.

Falls es möglich ist, die Faktorisierung des Zählers so durchzuführen, daß der Grad von $P_1^{(b)}(p)$ denjenigen von $D_1(p)$ und der Grad von $P_1^{(a)}(p)$ denjenigen von $D_2(p)$ nicht übertrifft, dann sind die resultierenden Matrixelemente der RC-Zweitore in der Tat für $Z_0(p) \equiv 0$ miteinander verträglich und somit realisierbar.

Die genannten Gradforderungen können jedoch aus zwei Gründen nicht in allen Fällen auf diese Weise erfüllt werden:

a) Gemäß den Gln. (32a) und (32c) gilt für den Grad der Polynome $D_1(p)$ und $D_2(p)$

$$\delta[D_1] = 1 + r,$$

$$\delta[D_2] = n + m - r,$$

also

$$\delta[D_1] + \delta[D_2] = n + m + 1. \quad (121)$$

Andererseits kann das Zählerpolynom $P_1(p)$ maximal den Grad

$$\text{Max } \delta[P_1] = 2m + n \quad (122)$$

erreichen. Bei der Wahl von $l = m - 1$ kann also ein Graddefizit zwischen den linken Seiten der Gln. (121) und (122) auftreten.

b) Selbst bei ausreichender Summe der Grade von $D_1(p)$ und $D_2(p)$ kann infolge von Einschränkungen in der Faktorisierung von $P_1(p)$ eine Verträglichkeit der Matrixelemente für $Z_0(p) \equiv 0$ nicht erreichbar sein. Enthält nämlich das Polynom $P_1(p)$ genau $(m + n/2)$ konjugiert komplexe Nullstellenpaare, wobei n eine gerade und $(m + n/2)$ eine ungerade Zahl ist, so kann keine zulässige Faktorisierung erfolgen, da $P_1^{(a)}(p)$ und $P_1^{(b)}(p)$ reelle Polynome sein müssen.

Die bestehenden Schwierigkeiten werden in jedem Fall durch die Wahl der Erweiterungsfunktion

$$Z_0(p) = \xi_0 + \frac{\xi_k}{p + \xi_k} \quad (k=1, 2, \dots, n+m+1) \quad (123a)$$

oder

$$Z_o(p) = \xi_o + \frac{\xi_k}{\delta_k} - \frac{p \xi_k / \delta_k}{p + \delta_k} \quad (123b)$$

$$= \frac{D_o(p)}{Q_o(p)} \quad (123c)$$

mit $\xi_o \geq 0$ und $\xi_k \geq 0$ beseitigt. Muß $\xi_k > 0$ gesetzt werden, so sind bei den Zuordnungen zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Für $k = 1, 2, \dots, m + r$ muß gemäß Gl. (120)

$$z_{12}^{(b)}(p) = \frac{K_2 P_1^{(b)}(p) Q_o(p)}{Q_1(p)}, \quad (124a)$$

$$-y_{12}^{(a)}(p) = \frac{K_1 P_1^{(a)}(p)}{Q_2(p) Q_o(p)} \quad (124b)$$

gelten. Das Polynom $Q_o(p)$ ist als Faktor in $Q_1(p)$ enthalten.

b) Für $k = m + r + 1, \dots, n + m + 1$ muß gemäß Gl. (120)

$$z_{12}^{(b)}(p) = \frac{K_2 P_1^{(b)}(p)}{Q_1(p) Q_o(p)}, \quad (125a)$$

$$-y_{12}^{(a)}(p) = \frac{K_1 P_1^{(a)}(p) Q_o(p)}{Q_2(p)} \quad (125b)$$

gelten. Hier ist das Polynom $Q_o(p)$ als Faktor in $Q_2(p)$ enthalten [vgl. Gl.n. (31a,b)].

Die Koeffizienten $\xi_o \geq 0$ und $\xi_k \geq 0$ müssen so klein gewählt werden, daß die Funktion $y_{22}^{(a)}(p)$ Gl. (119) eine RC-Admittanz ist, d.h.

$y_{22}^{(a)}(0) \geq 0$ gilt. Dies ist wegen $Z_2(0) > 0$ stets möglich.

2.2. Verlustberücksichtigung bei Verwendung nicht-idealer Gyratoren

Der nicht-ideale Gyrtator wird in bekannter Weise durch einen idealen aktiven Gyrtator dargestellt, an dessen Eingang und Ausgang die Verlustleitwerte $g_0 g_{11}$ bzw. $g_0 g_{22}$ parallel liegen. Diese sollen in die angrenzenden passiven RC-Zweitore integriert werden [vgl. Bild 12]. Nach der Abspaltung der benötigten Querleitwerte von den RC-Zweitoren a und b müssen die Matrixelemente der Restzweitore noch mit positiven Netzwerkelementen realisierbar sein. Daraus ergeben sich die Grenzen der Verlustberücksichtigung.

Diese Matrixelemente der Restzweitore a_1 und b_1 lauten gemäß den Gl. (118), (119) mit $Z_0(p)$ Gl. (123a)

$$\begin{aligned} y_{22}^{(a1)}(p) &= y_{22}^{(a)}(p) - g_0 g_{11} \\ &= Z_2(p) - Z_0(p) - g_0 g_{11} , \end{aligned}$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = -y_{12}^{(a)}(p)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{11}^{(b1)}(p)} &= \frac{1}{z_{11}^{(b)}(p)} - g_0 g_{22} \\ &= \frac{g_0^2 g_{12} g_{21}}{Z_1(p) + Z_0(p)} - g_0 g_{22} , \\ z_{12}^{(b1)}(p) &= z_{11}^{(b1)}(p) z_{12}^{(b)}(p) / z_{11}^{(b)}(p) . \end{aligned}$$

Da diese Paare von Admittanzmatrix- bzw. Impedanzmatrix-Elementen mit positiven Netzwerkelementen realisierbar sein sollen, müssen die

Ungleichungen

$$Z_2(0) - Z_0(0) - g_0 g_{11} \geq 0 \quad (126a)$$

und

$$\frac{g_0^2 g_{12} g_{21}}{Z_1(0) + Z_0(0)} - g_0 g_{22} \geq 0 \quad (126b)$$

erfüllt sein [6], woraus eine obere Grenze g_0'' bzw. eine untere Grenze g_0' für den Parameter g_0 zu entnehmen sind. Das Gleichheitszeichen in Beziehung (126a) ist nur für $y_{12}^{(a)}(0) = 0$ zulässig. Die genannten Grenzen für g_0 lauten

$$g_0'' = \frac{Z_2(0) - Z_0(0)}{g_{11}}, \quad (127a)$$

$$g_0' = \frac{g_{22} [Z_1(0) + Z_0(0)]}{g_{12} g_{21}}. \quad (127b)$$

Zur Sicherstellung der Realisierbarkeit muß gelten

$$g_0'' \geq g_0',$$

wobei das Gleichheitszeichen nur unter der Bedingung $y_{12}^{(a)}(0) = 0$ zugelassen werden kann. Setzt man die Gln. (127a,b) in diese Ungleichung ein, so folgt die bereits im Teil II, Abschnitt 2.5 auftretende Ungleichung (63).

Damit ist klar, daß bei der Verlustberücksichtigung in Kettennetzwerken gemäß Bild 24 gegenüber den im Teil II behandelten Strukturen kein Unterschied besteht. Insbesondere muß auch hier die Ungleichung (68) gelten, d.h. die Gyratorgüte muß die Polgüte des dort eingeführten fiktiven Übertragungspols übertreffen.

3. Realisierung einer Übertragungsfunktion zweiten Grades mit einem nicht-idealen Gyrator

3.1. Vorbemerkung

Wie bereits erwähnt wurde, ist es oft notwendig, eine Übertragungsfunktion in Faktoren von maximal zweitem Grad zu zerlegen. Besitzt ein solcher Faktor Nullstellen ausschließlich in der abgeschlossenen linken p -Halbebene, so ist eine einfache Realisierung durch eine Kettenstruktur möglich. Sie hat den Vorteil, daß die Übertragungsnullstellen nicht von den Parametern des Gyrators abhängen.

Die vorgeschriebene Übertragungsfunktion sei in der Form

$$H(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} = K \frac{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (128)$$

mit

$$a_v \geq 0 \quad (v = 0, 1, 2),$$

$$b_v > 0, \quad 4b_0 \geq b_1^2$$

gegeben. Der Betrag der Übertragungskonstante K kann nur bis zu einem von den Parametern der Funktion abhängigen Maximalwert vorgeschrieben werden.

3.2. Bestimmung der Matricelemente der RC-Zweitore

3.2.1. Übertragungsfunktion mit einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar

Um die einfachste Zerlegung mit möglichst vielen Freiheitsgraden für eine Optimierung der Übertragungskonstante zu erhalten, wählt man gemäß Teil I, Abschnitt 3.1 $l = m - 1$ und $Q(p) = p + \zeta_1$. Der Parameter ζ_1 sei in Grenzen veränderlich. Dann ergibt sich für die RC-RL-Zerlegung [vgl. Gl. (74)]

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = Z_1(p) + Z_2(p)$$

mit

$$Z_1(p) = \frac{B'_0 D_1(p)}{Q_1(p)} = \frac{P_2(-\zeta_1)}{p + \zeta_1},$$

$$Z_2(p) = \frac{A'_0 D_2(p)}{Q_2(p)} = p + b_1 - \zeta_1.$$

Im vorliegenden Fall ist weiterhin gemäß Gl. (123a) die Wahl

$$Z_0(p) = \xi_0 + \frac{\xi_1}{p + \zeta_1} \quad (\xi_0 > 0, \xi_1 > 0)$$

erforderlich. Damit lauten die Matrixelemente der RC-Zweitore nach den Gln. (118), (119) und (124a,b)

$$y_{22}^{(a)}(p) = p + b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - \frac{\xi_1}{\zeta_1} + \frac{p \xi_1 / \zeta_1}{p + \zeta_1}, \quad (129a)$$

$$-y_{12}^{(a)}(p) = \frac{K_1 P_1(p) / a_2}{p + \zeta_1} \quad (129b)$$

und

$$z_{11}^{(b)}(p) = \frac{1}{g_0 g_{12} g_{21}} \left[\xi_0 + \frac{P_2(-\zeta_1) + \xi_1}{p + \zeta_1} \right], \quad (130a)$$

$$z_{12}^{(b)}(p) = K_2. \quad (130b)$$

3.2.2. Übertragungsfunktionen mit reellen Nullstellen

Bei reellen Übertragungsnullstellen müssen zwei Fälle unterschieden werden:

$$a) \quad a_2 > 0$$

In diesem Fall muß $Z_0(p) = \xi_0$ gewählt werden. Dann ergeben sich gemäß Abschnitt 2.1 die Matrixelemente

$$y_{22}^{(a)}(p) = p + b_1 - \epsilon_1 - \xi_0, \quad (131a)$$

$$-y_{12}^{(a)}(p) = K_1 P_1^{(a)}(p) \quad (131b)$$

und

$$z_{11}^{(b)}(p) = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_{12} \epsilon_{21}} \left[\frac{P_2(-\epsilon_1)}{p + \epsilon_1} + \xi_0 \right], \quad (132a)$$

$$z_{12}^{(b)}(p) = \frac{K_2 P_1^{(b)}(p)}{p + \epsilon_1}. \quad (132b)$$

Die reellen Polynome $P_1^{(a)}(p)$ und $P_1^{(b)}(p)$ besitzen jeweils den ersten Grad.

$$b) \quad a_2 = 0$$

In diesem Fall muß $Z_0(p) \equiv 0$ gewählt werden. In den Gln. (131a) und (132a) ist somit $\xi_0 = 0$ zu setzen, außerdem muß die Zuordnung $P_1^{(b)}(p) = 1$ getroffen werden.

3.3. Optimierung der Übertragungskonstante bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Gyratorverluste

3.3.1. Übertragungsfunktion mit einem konjugiert komplexen Nullstellenpaar

Nach den Abschnitten 2.2 und 3.2.1 ergeben sich für die Matrixelemente der Restzweiteile a_1 und b_1 , die nach der Abspaltung der Verlustleitwerte des Gyrators entstehen, die Beziehungen

$$y_{22}^{(a1)}(p) = y_{22}^{(a)}(p) - g_0 g_{11} ,$$

d.h. mit Gl. (129a)

$$y_{22}^{(a1)}(p) = \frac{p^2 + p(b_1 - \xi_0 - g_0 g_{11}) + g_1(b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - \xi_1/\zeta_1 - g_0 g_{11})}{p + \zeta_1} \quad (133a)$$

und nach Gl. (129b)

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = y_{12}^{(a)}(p) = \frac{K_1(p^2 + p a_1/a_2 + a_0/a_2)}{p + \zeta_1} . \quad (133b)$$

Weiterhin folgt ebenso

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{1}{1/z_{11}^{(b)}(p) - g_0 g_{22}} ,$$

d.h. mit Gl. (130a)

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{\xi_0 p + P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0 \zeta_1}{g_0^2 g_{12} g_{21}(p + \zeta_1) - g_0 g_{22}[P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0(p + \zeta_1)]} \quad (134a)$$

und gemäß Gl. (130b)

$$z_{12}^{(b1)}(p) = \frac{K_2 g_0^2 g_{12} g_{21}(p + \zeta_1)}{g_0^2 g_{12} g_{21}(p + \zeta_1) - g_0 g_{22}[P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0(p + \zeta_1)]} . \quad (134b)$$

Prüft man die Fialkow-Gerst-Bedingungen bei beiden Zweitoren (vgl. Teil I, Abschnitt 1), so erhält man mehrere Beziehungen für

die obere Grenze der Übertragungskonstante K_1 bzw. K_2 und Einschränkungen für die Wahl der Parameter ζ_1 , g_0 , ξ_0 und ξ_1 .

Durch Vergleiche der Zählerkoeffizienten der rechten Seiten von Gl. (133a) und Gl. (133b) ermittelt man die folgenden von den genannten Parametern abhängigen Größen, die als obere Grenze für K_1 in Frage kommen:

$$K'_{M1} = \frac{a_2}{a_0} \zeta_1 (b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - \xi_1/\zeta_1 - g_0 g_{11}) , \quad (135a)$$

$$K'_{M2} = \frac{a_2}{a_1} (b_1 - \xi_0 - g_0 g_{11}) , \quad (135b)$$

$$K'_{M3} = 1 . \quad (135c)$$

Die obere Grenze für K_1 ergibt sich dann aus der Beziehung

$$K_1 \leq \text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}, K'_{M3}] . \quad (136)$$

Aufgrund eines entsprechenden Vergleichs kommen gemäß den Gln. (134a,b) als obere Grenze von K_2 die Größen

$$K''_{M1} = \frac{[P_2(-\zeta_1) + \xi_1]/\zeta_1 + \xi_0}{g_0^2 g_{12} g_{21}} ,$$

$$K''_{M2} = \frac{\xi_0}{g_0 g_{12} g_{21}} \quad (137)$$

in Frage. Wegen $P_2(-\zeta_1) > 0$ für $\zeta_1 > 0$ läßt sich sofort die Relation

$$K''_{M2} < K''_{M1}$$

erkennen, so daß das Maximum von K_2 durch

$$K_2 \leq K''_{M2} \quad (138)$$

gegeben ist.

Als Nebenbedingung ist jedoch zusätzlich gemäß den Gln. (134a,b) die Ungleichung

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{12} \varepsilon_{21} \zeta_1 - \varepsilon_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0 \zeta_1] \geq 0 \quad (139)$$

zu erfüllen, da der Pol von $z_{11}^{(bl)}(p)$ auf der nicht-positiv reellen Achse liegen muß.

Die obere Grenze für die Übertragungskonstante des Gesamtweiters resultiert dann aus den Gln. (136) und (138) unter Berücksichtigung von Gl. (117):

$$K \leq \frac{\xi_0}{a_2 \varepsilon_0 \varepsilon_{12}} \min [K'_{M1}, K'_{M2}, K'_{M3}] . \quad (140)$$

Im folgenden sollen zuerst die Gebiete ermittelt werden, in welchen entweder K'_{M1} oder K'_{M2} oder K'_{M3} das Maximum der Konstante K in Gl. (140) bestimmt. Mit $\mathcal{G}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$) wird dasjenige Gebiet bezeichnet, für welches

$$K'_{M\nu} = \min [K'_{M1}, K'_{M2}, K'_{M3}]$$

gilt. Die Darstellung der Gebiete erfolgt in einer (ζ_1, ε) -Ebene, wobei die Größe $\varepsilon > 0$ als Wert der Funktion $y_{22}^{(a1)}(p)$ an der Stelle $p = 0$ durch die Beziehung

$$\varepsilon = b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - \frac{\xi_1}{\zeta_1} - \varepsilon_0 \varepsilon_{11} \quad (141)$$

definiert ist. Damit erhalten die Gln. (135a,b,c) die Gestalt

$$K'_{M1} = \frac{a_2}{a_0} \zeta_1 \varepsilon, \quad (142a)$$

$$K'_{M2} = \frac{a_2}{a_1} (\varepsilon + \xi_1 / \zeta_1 + \zeta_1), \quad (142b)$$

$$K'_{M3} = 1. \quad (142c)$$

Der Parameter $\xi_1 > 0$ sei fest gewählt. Dann ergeben sich die folgenden Grenzkurven zwischen den Gebieten $\mathcal{L}_\nu$:

a) Grenzkurve zwischen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_3$

Aus $K'_{M1} = K'_{M3}$ folgt

$$\varepsilon \zeta_1 = \frac{a_0}{a_2}. \quad (143a)$$

b) Grenzkurve zwischen $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_3$

Aus $K'_{M2} = K'_{M3}$ folgt

$$\varepsilon = \frac{a_1}{a_2} - \frac{\xi_1}{\zeta_1} - \zeta_1. \quad (143b)$$

c) Grenzkurve zwischen $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$

Aus $K'_{M1} = K'_{M2}$ folgt

$$\varepsilon = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{\zeta_1 + \xi_1 / \zeta_1}{\zeta_1 - a_0 / a_1}. \quad (143c)$$

Im Bild 25 sind die entsprechenden Kurven und Gebiete dargestellt. Die Komplementärgebiete werden dabei mit $\bar{\mathcal{L}}_\nu$ bezeichnet.

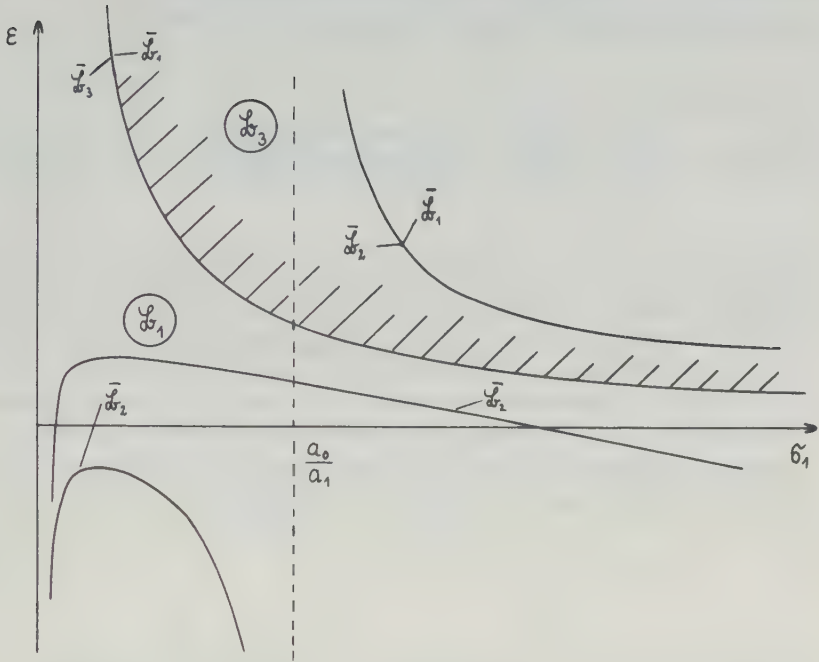


Bild 25: Darstellung der Gebiete $\mathfrak{L}_v$

Es wird nun behauptet, daß ein zulässiges Gebiet $\mathfrak{L}_2$ ($\epsilon > 0$) nicht existiert. Für $\sigma_1 < a_0/a_1$ ist nämlich gemäß Gl. (143c) $\mathfrak{L}_2$ nur für negative ϵ -Werte existent. Der zulässige Bereich $\epsilon > 0$ wird nach Gl. (143a) unter die Gebiete $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_3$ aufgeteilt. Für $\sigma_1 > a_0/a_1$ müßten, falls ein Gebiet $\mathfrak{L}_2$ vorhanden wäre, Schnittpunkte der Kurven Gl. (143b) und (143c) bei positiv reellen σ_1 -Werten existieren. Durch Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen folgt jedoch

$$\tilde{P}_1(-\sigma_1) = -\xi_1 a_2 .$$

Diese Beziehung hat keine reellen Nullstellen für $\xi_1 \geq 0$, da $\tilde{P}_1(p)$ laut Voraussetzung nur ein konjugiert komplexes Nullstellen-

paar besitzt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Es verbleibt noch die Aufgabe, das Maximum der Funktion

$$K_M = \frac{\xi_0}{a_2 g_0 g_{12}} \cdot \begin{cases} K'_{M1} & \text{für das Gebiet } \mathcal{L}_1, \\ K'_{M3} & \text{für das Gebiet } \mathcal{L}_3 \end{cases} \quad (144)$$

zu ermitteln. Dabei kann vorweg folgende wichtige Erkenntnis gewonnen werden. Betrachtet man alle Parameter außer $g_0 > 0$ als fest, so werden gemäß den Gln. (135a,b,c) K'_{M1} und K'_{M2} mit kleiner werdenden g_0 -Werten immer größer, während K'_{M3} unabhängig von g_0 ist. Daher steigt in jedem Fall der Wert von K_M Gl. (144) mit fallenden Werten von g_0 . Das Maximum der Übertragungskonstante bezüglich dieses Parameters befindet sich also sicher an der unteren zulässigen, durch Beziehung (139) festgelegten Grenze von g_0 :

$$g_0 = \frac{g_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0 \zeta_1]}{g_{12} g_{21} \zeta_1} \quad (145)$$

Berücksichtigt man diese Bedingung, so ergibt sich gemäß den Gln. (135a) und (144) für das Gebiet $\mathcal{L}_1$ nach kurzer Zwischenrechnung

$$K_M = \frac{g_{21} \xi_0 \zeta_1}{g_{22} a_0} \left[\frac{b_0}{P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0 \zeta_1} - \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \right] \quad (146)$$

Wie man sofort sieht, kann eine Untersuchung des Verhaltens von K_M bezüglich des Parameters $\xi_1 > 0$ entfallen. Dieser muß möglichst klein gewählt werden. Hinsichtlich der verbleibenden Parameter ζ_1 und ξ_0 werden im folgenden relative Maxima in $\mathcal{L}_1$ gesucht. An solchen Stellen müssen die partiellen Ableitungen nach beiden Variablen verschwinden. Man bildet leicht

$$\frac{\partial K_M}{\partial \xi_1} = \frac{g_{21} \xi_0}{g_{22} a_0} \left[\frac{b_0 (-\xi_1^2 + b_0 + \xi_1)}{[P_2(-\xi_1) + \xi_1 + \xi_0 \xi_1]^2} - \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \right] \quad (147a)$$

und

$$\frac{\partial K_M}{\partial \xi_0} = \frac{g_{21} \xi_1}{g_{22} a_0} \left[\frac{b_0 [P_2(-\xi_1) + \xi_1]}{[P_2(-\xi_1) + \xi_1 + \xi_0 \xi_1]^2} - \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \right]. \quad (147b)$$

Wenn an bestimmten Stellen beide Ableitungen verschwinden, dann müssen dort auch die eckigen Klammern auf den rechten Seiten der Gln. (147a,b) gleich sein, nämlich gleich Null. Durch Gleichsetzen folgt als notwendige Bedingung für relative Extrema

$$\xi_1(2\xi_1 - b_1) = 0,$$

woraus als einzige sinnvolle Lösung $\xi_1 = b_1/2$ folgt. Setzt man diese Lösung z.B. in $\partial K_M / \partial \xi_1 = 0$ gemäß Gl. (147a) ein, so wird die Lösung durch den Wert für ξ_0 vervollständigt:

$$\begin{aligned} \frac{b_1}{2} \xi_0 &= \sqrt{\frac{b_0(b_0 - b_1^2/4 + \xi_1)}{4Q_G^2/(4Q_G^2 - 1)}} - (b_0 - \frac{b_1^2}{4} + \xi_1) \\ &= b_0 \sqrt{(1 - \frac{1}{4Q_P^2} + \frac{\xi_1}{b_0})(1 - \frac{1}{4Q_G^2})} \left[1 - \sqrt{\frac{1 - 1/4Q_P^2 + \xi_1/b_0}{1 - 1/4Q_G^2}} \right]. \end{aligned} \quad (148)$$

Aus der letzten Darstellung erkennt man unmittelbar, daß eine positive Lösung für ξ_0 immer existiert, falls $Q_G > Q_P$ ist und $\xi_1 > 0$ hinreichend klein gewählt wird.

Setzt man $\xi_1 = b_1/2$ und ξ_0 gemäß Gl. (148) in K_M Gl. (146) ein, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung der Funktionswert im Maximum

$$\text{Max } K_M = \frac{\xi_{21} b_o}{\xi_{22} a_o} \left[1 - \sqrt{\frac{1 - 1/4Q_P^2 + \xi_1/b_o}{1 - 1/4Q_G^2}} \right]^2. \quad (149)$$

Eine Näherung für $4Q_G^2 \gg 1$, $4Q_P^2 \gg 1$ und $\xi_1 \rightarrow 0$ ergibt

$$\text{Max } K_M \approx \frac{\xi_{21} b_1^4}{\xi_{22} 6^4 a_o b_o} \left[1 - \left(\frac{Q_P}{Q_G} \right)^2 \right]^2. \quad (150)$$

Gemäß Gl. (143a) liegt dieses Maximum nicht im betrachteten Teilgebiet $\mathcal{A}_1$, falls für die Stelle des Maximums die Ungleichung

$$\xi \zeta_1|_{\text{Max}} \geq \frac{a_o}{a_2} \quad (151)$$

mit dem Größerzeichen erfüllt ist. Die Größe ξ wurde durch Gl. (141) definiert. Hiermit folgt unter Berücksichtigung von Gl. (145)

$$\xi \zeta_1 = b_o - \left[P_2(-\zeta_1) + \xi_o \zeta_1 + \xi_1 \right] \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \quad (152)$$

und an der Maximumstelle, d.h. für $\zeta_1 = \frac{b_1}{2}$ und ξ_o nach Gl. (148)

$$\xi \zeta_1|_{\text{Max}} = b_o \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 1/4Q_P^2 + \xi_1/b_o}{1 - 1/4Q_G^2}} \right). \quad (153)$$

Falls also Ungleichung (151) mit diesem Wert $\xi \zeta_1|_{\text{Max}}$ erfüllt ist, so befindet sich das relative Maximum der untersuchten Funktion außerhalb des Gebietes $\mathcal{A}_1$, und man muß das im Gebiet liegende Maximum auf dem Rand suchen.

Von Null verschiedene Lösungen bietet dabei die Grenzkurve zum Gebiet $\mathcal{L}_3$ (vgl. Bild 25). Der Verlauf von K_M auf dieser Kurve wird im Zusammenhang mit dem Verlauf von K_M in $\mathcal{L}_3$ untersucht.

Im Gebiet $\mathcal{L}_3$ lautet die Funktion K_M gemäß Gl. (144), (145) und (135c)

$$K_M = \frac{\varepsilon_{21} \xi_0 \zeta_1}{\varepsilon_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_1 + \xi_0 \zeta_1]} \quad (154)$$

Aus dieser Beziehung kann sofort folgendes entnommen werden: Bezüglich des Parameters $\xi_1 > 0$ wird die Übertragungskonstante maximal für möglichst kleine ξ_1 -Werte. Hinsichtlich des Parameters $\xi_0 > 0$ existiert ebenfalls kein relatives Extremum, da K_M mit wachsenden Werten von ξ_0 monoton ansteigt. Die Begrenzung von ξ_0 nach oben ist durch die Grenzkurve zum Gebiet $\mathcal{L}_1$ gemäß Gl. (151) als $\xi_0 = a_0/a_2$ gegeben. Das Maximum von K_M in $\mathcal{L}_3$ liegt also auf dieser Kurve, die mit Hilfe der Gl. (152) in der Form

$$\xi_0 \zeta_1 = \frac{b_0 - \frac{a_0}{a_2}}{4Q_G^2/(4Q_G^2-1)} - P_2(-\zeta_1) + \xi_1 \quad (155)$$

dargestellt werden kann. Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (154) ergibt schließlich

$$K_M = \frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{22}} \cdot \frac{b_0 - a_0/a_2 - [P_2(-\zeta_1) + \xi_1] [4Q_G^2/(4Q_G^2-1)]}{b_0 - a_0/a_2} \quad .$$

Befindet sich die Stelle des relativen Extremums $\xi_0 \zeta_1|_{\text{Max}}$ nicht in $\mathcal{L}_1$, so muß gemäß Gl. (153) und Ungleichung (151) $b_0 > a_0/a_2$ gelten. Das Maximum von K_M wird somit in diesem Fall wieder für $\zeta_1 = b_1/2$ erreicht. Es hat den Wert

$$\text{Max } K_M = \frac{g_{21}}{g_{22}} \cdot \frac{b_0 \left(1 - \frac{1-1/4Q_P^2}{1-1/4Q_G^2} \frac{\xi_1}{b_0}\right) - \frac{a_0}{a_2}}{b_0 - a_0/a_2} \quad (156)$$

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß Gl. (149) immer als obere Abschätzung für die Übertragungskonstante K benutzt werden kann. Dieser Wert kann jedoch von K nur dann erreicht werden, wenn

$$\xi_{01}|_{\text{Max}} \leq a_0/a_2$$

erfüllt wird.

Aus dem vorausgegangenen läßt sich zusammenfassend folgende Anweisung für die Durchführung der Synthese geben, wenn eine maximale Übertragungskonstante bei komplexen Übertragungsnullstellen und bei Verwendung eines nicht-idealen Gyrators gefordert wird. Grundsätzlich muß die Gyratorgüte diejenige des Übertragungspols übertreffen, d.h. es muß $Q_G > Q_P$ gelten.

Im ersten Schritt ist nachzuprüfen, ob die Ungleichung (151) unter Verwendung von Gl. (153) mit dem Größerzeichen erfüllt ist. Wenn dies nicht der Fall ist, dann muß der Parameter $\xi_1 > 0$ so festgelegt werden, daß ξ_0 gemäß Gl. (148) größer als Null wird. Dies ist immer möglich. Schließlich ist mit den nun bekannten Parametern G_1 , ξ_1 , ξ_0 die verbleibende Größe g_0 gemäß Gl. (145) zu berechnen. Damit sind alle zur Bestimmung der Matrixelemente der RC-Zweitore benötigten Parameter bekannt. - Falls Ungleichung (151) mit dem Größerzeichen erfüllt wird, muß $\xi_1 > 0$ so festgelegt werden, daß man bei der Berechnung von ξ_0 gemäß Gl. (155) mit $G_1 = b_1/2$ einen positiven ξ_0 -Wert erhält. Dies ist bei hinreichend kleiner Wahl von $\xi_1 > 0$ immer möglich. Die Berechnung von g_0 erfolgt wieder nach Gl. (145), und damit sind auch in diesem Fall die Matrixelemente der RC-Zweitore eindeutig gemäß den Gln. (131a,b) und (132a,b) festgelegt.

Die Realisierung der Matrixelemente der RC-Zweitore a_1 und b_1 , die nach der Abspaltung der Verlustleitwerte des Gyrators übrigbleiben, ist immer möglich, wenn die Fialkow-Gerst-Bedingungen eingehalten werden. Die Admittanzmatrix-Elemente von Zweitor a_1 Gln. (133a,b) können unter dieser Voraussetzung jedenfalls nach dem Fialkow-Gerst-Verfahren verwirklicht werden (vgl. Teil I, Abschnitt 2.2). Die Impedanzmatrix-Elemente von Zweitor b_1 Gln. (134a,b) haben die Form

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{d_1 p + d_0}{c_1 p + c_0} ; z_{12}^{(b1)}(p) = \frac{e_1 p + e_0}{c_1 p + c_0} \quad (d_1 \geq e_1 \geq 0, d_0 \geq e_0 \geq 0) .$$

Nach der Abspaltung eines ohmschen Querleitwerts mit dem Wert $g^{(1)} = c_0/d_0$ von der Primärseite des Zweitores erhält man Restzweitorelemente $z_{11}^{(b2)}(p)$ und $z_{12}^{(b2)}(p)$, die wieder die Fialkow-Gerst-Bedingungen erfüllen, einen Pol in $p = 0$ aufweisen und somit offensichtlich ebenfalls ohne Einführung eines zusätzlichen konstanten Faktors in $z_{12}^{(b2)}(p)$ realisierbar sind.

3.3.2. Übertragungsfunktionen mit nicht-positiv reellen Nullstellen

a) $a_2 > 0$

Nach den Abschnitten 2.2 und 3.2.2 ergeben sich für die Matrixelemente der Restzweitore a_1 und b_1 , die nach der Abspaltung der Verlustleitwerte des Gyrators entstehen, mit den Bezeichnungen $P_1^{(a)}(p) = (p + x_1)$ und $P_1^{(b)}(p) = (p + x_2)$ die Beziehungen

$$y_{22}^{(a1)}(p) = y_{22}^{(a)}(p) - g_0 g_{11}$$

und mit den Gln. (131a,b)

$$y_{22}^{(a1)}(p) = p + b_1 - g_1 - g_0 - g_0 g_{11} , \quad (157a)$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = K_1(p + x_1) . \quad (157b)$$

Ebenso folgt

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{1}{1/z_{11}^{(b)}(p) - g_0 g_{22}}$$

und mit den Gln. (132a,b)

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{\xi_0 p + P_2(-\zeta_1) + \xi_0 \zeta_1}{g_0^2 g_{12} g_{21}(p + \zeta_1) - g_0 g_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_0(p + \zeta_1)]} , \quad (158a)$$

$$\begin{aligned} z_{12}^{(b1)}(p) &= z_{11}^{(b1)}(p) z_{12}^{(b)}(p) / z_{11}^{(b)}(p) \\ &= \frac{K_2 g_0^2 g_{12} g_{21}(p + x_2)}{g_0^2 g_{12} g_{21}(p + \zeta_1) - g_0 g_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_0(p + \zeta_1)]} . \end{aligned} \quad (158b)$$

Prüft man die Fialkow-Gerst-Bedingungen bei den obigen Matrixelementen nach, so erhält man mehrere Beziehungen für die obere Grenze der Übertragungskonstante K_1 bzw. K_2 . Weiterhin ergeben sich aus den Realisierbarkeitskriterien Einschränkungen für die Wahl der Parameter ζ_1 , g_0 und ξ_0 .

Als obere Grenzen für K_1 kommen demnach gemäß den Gln. (157a,b) die Funktionen

$$K'_{M1} = \frac{b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - g_0 g_{11}}{x_1} , \quad (159a)$$

$$K'_{M2} = 1 \quad (159b)$$

in Frage, und als obere Grenzen für K_2 gemäß den Gln. (158a,b)

$$K''_{M1} = \frac{P_2(-\zeta_1) + \xi_0 \zeta_1}{g_0 g_{12} g_{21} x_2} , \quad (160a)$$

$$K''_{M2} = \frac{\xi_0}{g_0 g_{12} g_{21}} . \quad (160b)$$

Aus diesen Beziehungen folgen dann die oberen Grenzen für K_1 und K_2 :

$$K_1 \leq \text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}] , \quad (161a)$$

$$K_2 \leq \text{Min} [K''_{M1}, K''_{M2}] . \quad (161b)$$

Es ist zusätzlich die Nebenbedingung nach Ungleichung (139) (mit $\xi_1 = 0$) wegen der dort genannten Gründe zu erfüllen. Die Übertragungskonstante des Gesamtweiters lautet schließlich mit den Gln. (117), (131b) und (132b)

$$K = \frac{\xi_0 g_{21}}{a_2} K_1 K_2 . \quad (162)$$

Bei der Bestimmung des Maximalwertes K_M von K müssen gemäß den Ungleichungen (161a,b) vier verschiedene Funktionen betrachtet werden, die jeweils einen bestimmten Gültigkeitsbereich besitzen. Es ist leicht zu erkennen, daß für alle diese Funktionen das Maximum bei fest gewählten zulässigen Parametern ζ_1 und ξ_0 für den kleinsten erlaubten Wert von g_0 erreicht wird. Dieser kann der Gl. (145) (mit $\xi_1 = 0$) entnommen werden.

Im folgenden sollen zunächst die Gebiete in der (ζ_1, ξ_0) -Ebene ermittelt werden, für welche die verschiedenen an der Bildung von K_M beteiligten Funktionen zuständig sind. Ähnlich wie im vorigen Abschnitt wird mit $\mathcal{L}'_v$ ein Gebiet bezeichnet, in welchem

$$K_{Mv}' = \text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}]$$

gilt, und mit $\mathcal{L}''_v$ ein Gebiet, in welchem

$$K''_{M1} = \text{Min} [K''_{M1}, K''_{M2}]$$

gültig ist.

Es ergeben sich folgende Grenzkurven zwischen den Gebieten:

1) Grenzkurve ($\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2$)

Aus $K'_{M1} = K'_{M2}$ folgt mit ξ_0 gemäß Gl. (145)

$$\xi_0 \xi_1 = -\xi_1^2 + \xi_1 \left[b_1 - x_1 \left(1 - \frac{1}{4Q_G^2} \right) \right] - \frac{b_0}{4Q_G^2} . \quad (163)$$

Die durchgezogene Kurve im Bild 26 zeigt die Funktion $\xi_0(\xi_1)$ Gl. (163). Schnittpunkte mit der ξ_1 -Achse müssen nicht existieren.

2) Grenzkurve ($\mathcal{L}''_1 \cap \mathcal{L}''_2$)

Aus $K''_{M1} = K''_{M2}$ folgt

$$\xi_0 = \frac{P_2(-\xi_1)}{x_2 - \xi_1} . \quad (164)$$

Diese Kurve ist im Bild 26 gestrichelt gezeichnet.

Es kann zwei positiv reelle Schnittpunkte ξ_{11} und ξ_{12} der beiden Grenzkurven geben, die aus der Beziehung

$$\xi_1^2 \left[1 - \frac{x_1}{x_2} \left(1 - \frac{1}{4Q_G^2} \right) \right] - \xi_1 \left[b_1 - \left(x_1 + \frac{b_0}{x_2} \right) \left(1 - \frac{1}{4Q_G^2} \right) \right] + \frac{b_0}{4Q_G^2} = 0 \quad (165)$$

berechnet werden können. Existieren diese Schnittpunkte nicht, so entfällt das Gebiet ($\mathcal{L}'_2 \cap \mathcal{L}''_1$).

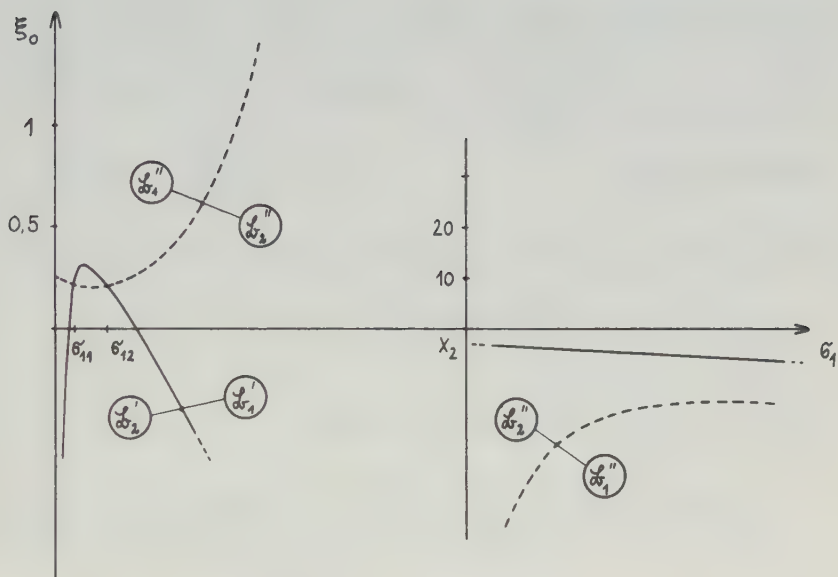


Bild 26: Grenzkurven und Gebiete in der (g_1, g_0) -Ebene für $a_2 > 0$

Die Funktion K_M sei definiert durch

$$K_M = \frac{g_0 g_{21}}{a_2} \cdot \text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}] \cdot \text{Min} [K''_{M1}, K''_{M2}] .$$

Ihr Funktionswert entspricht bei jeder zulässigen Kombination der Parameterwerte der oberen Grenze der Übertragungskonstante. Die nächste Aufgabe besteht darin, das Maximum von K_M innerhalb des zulässigen Bereichs der Parameter g_1 und g_0 zu ermitteln. Wie

bereits erwähnt wurde, setzt man dabei für $g_o > 0$ den Minimalwert gemäß Gl. (145) ein. Wie man sofort einsieht, gilt

$$\left. \begin{aligned} K_M &= \frac{g_o g_{21}}{a_2} K'_{M\mu} K''_{M\nu} \\ \text{im Gebiet } (\mathcal{G}'_\mu \cap \mathcal{G}''_\nu) \quad (\mu, \nu = 1, 2) . \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

Damit kann die Funktion in den einzelnen im Bild 26 dargestellten Gebieten berechnet werden.

a) Gebiet $(\mathcal{G}'_1 \cap \mathcal{G}''_2)$

Man erhält gemäß Gl. (166) mit den Gln. (159a) und (160b)

$$K_M = \frac{\xi_o (b_1 - \zeta_1 - \xi_o - g_o g_{11})}{g_{12} a_2 x_1 g_o} \quad (167)$$

und mit g_o Gl. (145) nach kurzer Rechnung

$$K_M = \frac{g_{21} \xi_o \{ b_o - [P_2(-\zeta_1) + \xi_o \zeta_1] [1 + 1/(4Q_G^2 - 1)] \}}{g_{22} a_2 x_1 [P_2(-\zeta_1) + \xi_o \zeta_1]} . \quad (168)$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck besitzt eventuell im betrachteten Gebiet ein relatives Maximum. Daher werden die partiellen Ableitungen nach den Variablen ζ_1 und ξ_o gebildet. Man berechnet ohne Mühe

$$\frac{\partial K_M}{\partial \xi_o} = \frac{g_{21}}{g_{22} a_2 x_1} \left[\frac{b_o P_2(-\zeta_1)}{[P_2(-\zeta_1) + \xi_o \zeta_1]^2} - \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \right]$$

und

$$\frac{\partial K_M}{\partial \zeta_1} = \frac{g_{21}}{g_{22} a_2 x_1} \cdot \frac{-\xi_o b_o (2\zeta_1 - b_1 + \xi_o)}{[P_2(-\zeta_1) + \xi_o \zeta_1]^2} .$$

Die Gleichung $\partial K_M / \partial \zeta_1 = 0$ liefert als einzige Lösung innerhalb des betrachteten 1. Quadranten der (ζ_1, ξ_0) -Ebene

$$\xi_0 = b_1 - 2 \zeta_1. \quad (169)$$

Substituiert man ξ_0 in der Gleichung $\partial K_M / \partial \xi_0 = 0$ durch Gl. (169), so folgt

$$P_2(-\zeta_1) = \frac{4Q_G^2 (b_0 - \zeta_1^2)^2}{(4Q_G^2 - 1) b_0}. \quad (170)$$

Im Bild 27 sind die auf der rechten und linken Seite von Gl. (170) stehenden Funktionen über der Variablen ζ_1 aufgetragen.

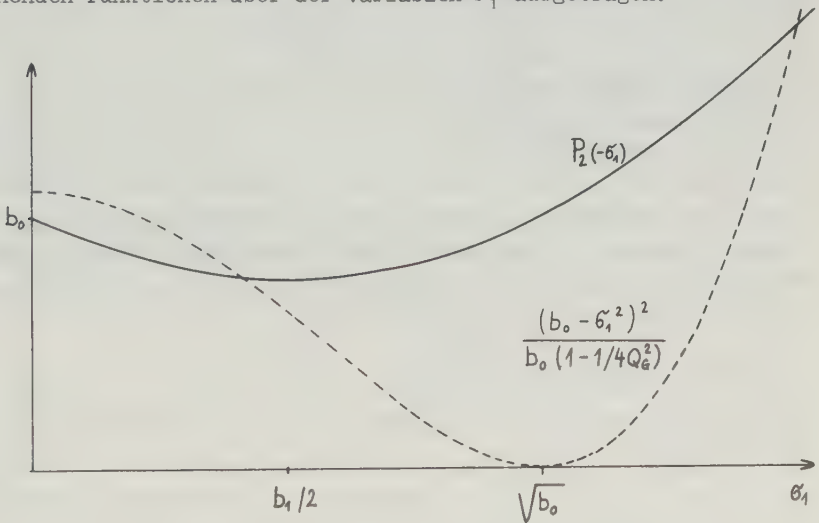


Bild 27: Zur Lösung der Gl. (170)

Es müssen jedenfalls zwei positiv reelle Lösungen für ζ_1 existieren. Eine genauere Untersuchung von Gl. (170) zeigt, daß eine dieser Lösungen kleiner als $b_1/2$, die andere größer als $\sqrt{b_0} > b_1/2$ sein muß. Somit ist immer ein im ersten Quadranten der (ζ_1, ξ_0) -Ebene

liegendes Wertepaar (ζ_{1m}, ξ_{om}) gemäß den Gln. (169) und (170) vorhanden, in welchem die Funktion Gl. (168) ein relatives Maximum besitzt. Es muß allerdings noch geprüft werden, ob sich diese Stelle (ζ_{1m}, ξ_{om}) im vorgeschriebenen Gebiet $(\mathcal{X}_1' \cap \mathcal{X}_2'')$ befindet. Dies kann mit Hilfe der Gln. (163) und (164) erfolgen. Mit Gl. (169) läßt sich eine obere Abschätzung für den Wert von K_M Gl. (170) angeben. Berücksichtigt man

$$P_2(-\zeta_{1m}) + \xi_{om} \zeta_{1m} > b_0 - b_1^2/4$$

und

$$0 < \xi_{om} < b_1,$$

so lautet diese Abschätzung

$$K_M < \frac{g_{21} b_1 \left(1 - \frac{4Q_P^2 - 1}{4Q_G^2 - 1}\right)}{g_{22} a_2 x_1 (4Q_P^2 - 1)} \quad (171)$$

Ist in $(\mathcal{X}_1' \cap \mathcal{X}_2'')$ kein relatives Maximum vorhanden, so muß das absolute Maximum in diesem Gebiet auf den Rändern gesucht werden. Diese werden jedoch im Zusammenhang mit den anderen Teilgebieten untersucht.

β) Gebiet $(\mathcal{X}_2' \cap \mathcal{X}_1'')$

Falls dieses Gebiet existiert, erhält man gemäß Gl. (166) mit den Gln. (159b) und (160a)

$$K_M = \frac{P_2(-\zeta_1) + \xi_0 \zeta_1}{g_0 g_{12} x_2 a_2}$$

und mit dem kleinstmöglichen g_0 -Wert nach Gl. (145)

$$K_M = \frac{g_{21} \zeta_1}{g_{22} a_2 x_2} \quad (172)$$

Der Funktionswert ist unabhängig von ξ_0 , das Maximum wird somit für $\xi_1 = \xi_{12}$ (vgl. Bild 26) erreicht.

7) Gebiet $(\mathcal{X}'_1 \cap \mathcal{X}''_1)$

Man erhält aus Gl. (166) mit den Gln. (159a) und (160a)

$$K_M = \frac{g_0 g_{21}}{a_2} \cdot \frac{b_1 - \xi_1 - \xi_0 - g_0 g_{11}}{x_1} \cdot \frac{P_2(-\xi_1) + \xi_0 \xi_1}{g_0 g_{12} g_{21} x_2}$$

und mit g_0 gemäß Gl. (145) nach kurzer Zwischenrechnung

$$K_M = \frac{g_{21} \left\{ b_0 - [P_2(-\xi_1) + \xi_0 \xi_1] [1 + 1/(4Q_G^2 - 1)] \right\}}{g_{22} a_2 x_1 x_2} \quad (173)$$

Man erkennt, daß das Maximum von K_M auf dem Rand des betrachteten Gebietes liegen muß, da die Funktion bei festem ξ_1 für wachsende ξ_0 -Werte monoton fällt. Als sinnvolle Ränder kommen bestimmte Abschnitte der Grenzkurven $(\mathcal{X}''_1 \cap \mathcal{X}''_2)$ und $(\mathcal{X}'_1 \cap \mathcal{X}'_2)$ in Frage. Auf der erstgenannten Grenzkurve ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (164) in Gl. (173) folgender Verlauf von K_M

$$K_M | (\mathcal{X}''_1 \cap \mathcal{X}''_2) = \frac{g_{21} \left[b_0 - \frac{P_2(-\xi_1) x_2}{x_2 - \xi_1} \left(1 + \frac{1}{4Q_G^2 - 1} \right) \right]}{g_{22} a_2 x_1 x_2} \quad (174)$$

Der Funktionsverlauf auf der Grenzkurve $(\mathcal{X}'_1 \cap \mathcal{X}'_2)$ ist bereits bekannt und durch Gl. (172) gegeben. Beide Funktionsverläufe sind im Bild 28 im interessierenden Bereich über der Variablen ξ_1 prinzipiell aufgetragen.

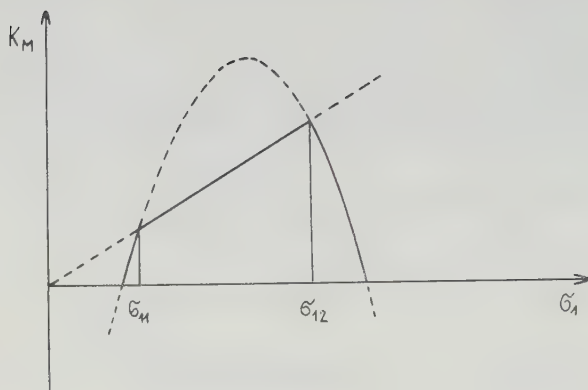


Bild 28: Verlauf von K_M auf der Grenzkurve $(\mathcal{L}_1'' \cap \mathcal{L}_2'')$

Sind keine Schnittpunkte ζ_{11} und ζ_{12} gemäß Bild 28 vorhanden, so erhält man den Maximalwert von K_M durch Nullsetzen der Ableitung nach ζ_1 an der Stelle

$$\zeta_{1m} = x_2 - \sqrt{P_2(-x_2)} . \quad (175a)$$

Der Funktionswert an dieser Stelle lautet

$$K_M(\zeta_{1m}) = \frac{g_{21}(\zeta_{1m}^2 - b_0/4Q_G^2)}{g_{22}a_2x_1x_2(1-1/4Q_G^2)} . \quad (175b)$$

Sind die genannten Schnittpunkte vorhanden, so liegt das gesuchte Maximum genau dann nicht im Punkt $\zeta_1 = \zeta_{1m}$ sondern im Punkt $\zeta_1 = \zeta_{12}$, falls $\zeta_{11} < \zeta_{1m} < \zeta_{12}$ gilt.

6) Gebiet $(\mathcal{L}_2' \cap \mathcal{L}_2'')$

Sofern das Gebiet existiert, erhält man aus Gl. (166) mit den Gln. (159b) und (160b)

$$K_M = \frac{g_0 g_{21}}{a_2} \cdot \frac{\xi_0}{g_0^2 g_{12} g_{21}}$$

und mit dem Minimalwert von g_0 gemäß Gl. (145) nach kurzer Zwischenrechnung

$$K_M = \frac{g_{21} \xi_0 \zeta_1}{a_2 g_{22} [P_2(-\zeta_1) + \xi_0 \zeta_1]} \quad (176)$$

Durch Bildung der partiellen Ableitungen nach ζ_1 und ξ_0 stellt man leicht fest, daß im Gebiet $\zeta_1 > 0$, $\xi_0 > 0$ keine relativen Extremwerte vorhanden sind. Das Maximum im betrachteten Gebiet muß also auf dem Rand liegen. Als sinnvolle Ränder kommen Abschnitte der Grenzkurven $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$ und $(\mathcal{L}''_1 \cap \mathcal{L}''_2)$ in Frage. Der Funktionsverlauf auf dem betreffenden Stück der letztgenannten Kurve ist bereits bekannt und durch Gl. (172) gegeben.

Auf der Grenzkurve $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$ ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (163) in Gl. (176) der folgende Verlauf von K_M :

$$K_M|_{(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)} = \frac{g_{21} [-\zeta_1^2 + \zeta_1 [b_1 - x_1(1 - 1/4Q_G^2)] - b_0/4Q_G^2]}{a_2 g_{22} (1 - 1/4Q_G^2)(b_0 - \zeta_1 x_1)} \quad (177)$$

Die Funktionsverläufe auf beiden Randkurven sind im Bild 29 im interessierenden Bereich über der Variablen ζ_1 aufgetragen.

Sind keine Schnittpunkte ζ_{11} und ζ_{12} gemäß Bild 29 vorhanden, so erhält man den Maximalwert von K_M aus der Beziehung $\partial K_M / \partial \zeta_1 = 0$ an der Stelle

$$\zeta_{1m} = \frac{b_0}{x_1} - \sqrt{P_2(-\frac{b_0}{x_1})} \quad (178a)$$

Der Funktionswert im Maximum lautet hier

$$K_M(\zeta_{1m}) = \frac{g_{21}(\zeta_{1m}^2 - b_0/4Q_G^2)}{a_2 g_{22} b_0 (1 - 1/4Q_G^2)} . \quad (178b)$$

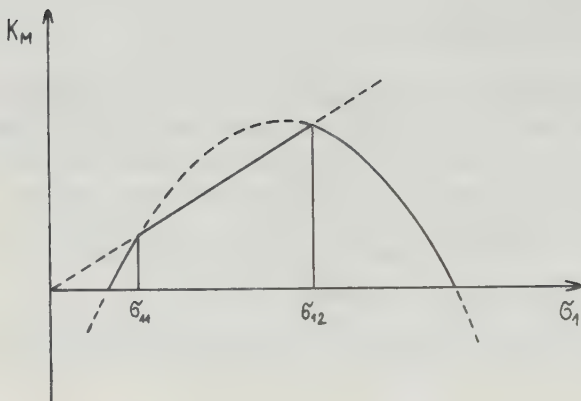


Bild 29: Verlauf von K_M auf der Grenzkurve $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$

Sind die genannten Schnittpunkte vorhanden, so liegt das gesuchte Maximum von K_M genau dann nicht im Punkt $\zeta_1 = \zeta_{1m}$ sondern im Punkt $\zeta_1 = \zeta_{12}$, falls $\zeta_{11} < \zeta_{1m} < \zeta_{12}$ gilt [vgl. Punkt r].

Die bisherigen Resultate sollen noch einmal kurz in Form einer Anweisung zur Synthese wiedergegeben werden.

Im ersten Schritt ist zu überprüfen, ob die unter Punkt α) berechnete Extremstelle (ζ_{1m}, ξ_{om}) Gln. (170) und (169) im Gebiet $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$ liegt. Ist dies der Fall, so bedeutet diese Lösung auch die Stelle des absoluten Maximums von K_M in allen Gebieten, da die Maxima in den anderen Gebieten immer auf den Grenzkurven zu $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$ liegen. - Befindet sich die genannte Extremstelle außer-

halb des erwähnten Gebietes, so ist es zweckmäßig, zwei Fälle zu unterscheiden. Existiert das im Punkt β) untersuchte Gebiet nicht, so ist das Maximum von K_M durch den größeren der beiden Werte $K_M(\delta_{1m})$ Gln. (175b) und (178b) festgelegt. Die Stelle des Maximums folgt aus Gl. (175a) bzw. (178a) mit ξ_0 gemäß den Gln. (164) bzw. (163). - Ist das im Punkt β) untersuchte Gebiet ($\mathcal{L}'_2 \cap \mathcal{L}'_1$) vorhanden, so gilt das bereits Gesagte, falls beide Werte δ_{1m} nach Gln. (175a) und (178a) außerhalb des Intervalls $(\delta_{11}, \delta_{12})$ liegen. Befinden sich beide Werte δ_{1m} im genannten Intervall, so erhält man das Maximum von K_M für $\delta_1 = \delta_{12}$. Liegt schließlich nur einer der Punkte δ_{1m} außerhalb des Intervalls $(\delta_{11}, \delta_{12})$, so ist durch diesen zusammen mit ξ_0 aus Gln. (163) bzw. (164) die Stelle des Maximums von K_M gegeben. Die Werte δ_{11} und δ_{12} ergeben sich als Lösungen der Gl. (165).

Damit sind alle Möglichkeiten erfaßt. Aus den nunmehr festgelegten Parametern δ_1 und ξ_0 kann nach Gl. (145) (mit $\xi_1 = 0$) die Größe g_0 berechnet werden. Sämtliche bekannten Parameter müssen daraufhin in die Gln. (157a,b) und (158a,b) zur Bestimmung der Matrixelemente der RC-Zweitore a_1 und b_1 eingesetzt werden.

Sonderfälle

I) $x_1 = 0$

Für $x_1 = 0$ entfällt das Gebiet $\mathcal{L}'_1$, daher müssen nur zwei Gebiete in der gezeigten Weise untersucht werden. Dabei ist jedoch sicherzustellen, daß der Funktionswert $y_{22}^{(a1)}(0)$ Gl. (157a) nicht negativ wird. Besondere Vorkehrungen waren bisher deshalb nicht notwendig, weil der genannte Wert als Faktor in K'_{M1} enthalten war. Es resultiert als zusätzliche Nebenbedingung die Ungleichung

$$b_1 - \delta_1 - \xi_0 - g_0 g_{11} \geq 0. \quad (179)$$

Berücksichtigt man noch die Gl. (145) für die Größe g_0 , so ergibt sich als oberer Rand für den Parameter ξ_0 eine Kurve, die mit der

Grenzkurve $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}'_2)$ gemäß Gl. (163) für $x_1 = 0$ übereinstimmt. Der entsprechende Ausschnitt von Bild 26 ist im Bild 30 wiedergegeben.

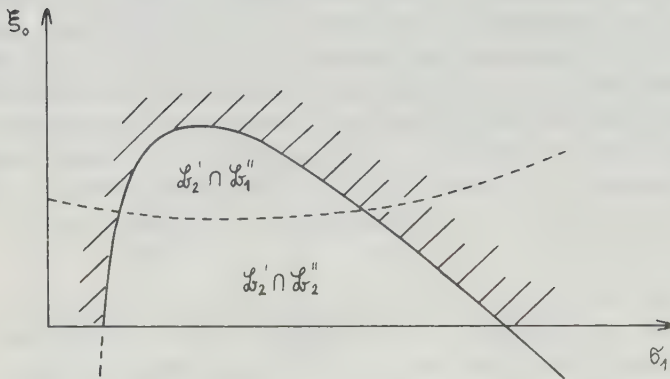


Bild 30: Gebiete in der (v_1, v_0) -Ebene für $x_1 = 0$

Die genannten Tatsachen haben zur Folge, daß die im Punkt δ) gefundenen Resultate auf den vorliegenden Fall mit $x_1 = 0$ angewendet werden können. Es ist lediglich zu beachten, daß aufgrund eines dort nicht angeschriebenen Zwischenergebnisses $v_{1m} = b_1/2$ gilt.

II) $x_2 = 0$

Hier entfällt das Gebiet $\mathcal{L}''_1$ und die Grenzkurve $(\mathcal{L}''_1 \cap \mathcal{L}''_2)$. Es verbleibt die Untersuchung der beiden Gebiete $(\mathcal{L}'_1 \cap \mathcal{L}''_2)$ und $(\mathcal{L}'_2 \cap \mathcal{L}''_2)$ gemäß den Punkten α) bzw. δ) .

III) $x_1 = x_2 = 0$

Bei einer doppelten Übertragungsnullstelle im Nullpunkt tritt nur

das Gebiet $(\mathcal{L}'_2 \cap \mathcal{L}''_2)$ auf, welches wieder durch die Randkurve Gl. (163) mit $x_1 = 0$ begrenzt wird. Es können die Ergebnisse von Punkt δ) verwendet werden, wobei $\epsilon_{1m} = b_1/2$ zu berücksichtigen ist. Schnittpunkte ϵ_{11} und ϵ_{12} sind in diesem Fall wegen $x_2 = 0$ nicht vorhanden.

b) $a_2 = 0$

Das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion lautet im vorliegenden Fall

$$P_1(p) = K [a_1 p + a_0] \quad (a_1 \geq 0, a_0 \geq 0) .$$

Die Matrixelemente der RC-Zweitore folgen aus den Gln. (131a,b) und (132a,b) mit $\xi_0 = 0$ und $P_1^{(b)}(p) = 1$. Abweichend von der dort gültigen Definition von K_1 soll hier zur Vermeidung weiterer Differenzierungen statt Gl. (131b) die Beziehung

$$-y_{12}^{(a)}(p) = K_1(a_1 p + a_0) \quad (180)$$

gelten. Damit wird die Übertragungskonstante des Gesamtzweitores

$$K = K_1 K_2 \xi_0 \xi_{21} \cdot \begin{cases} a_1 & \text{für } a_1 > 0 \\ a_0 & \text{für } a_1 = 0 . \end{cases} \quad \begin{matrix} (181a) \\ (181b) \end{matrix}$$

Die Matrixelemente der Restzweitore a_1 und b_1 , die nach der Abspaltung der Verlustleitwerte des Gyrators entstehen, gewinnt man in bekannter Weise. Sie haben die Form

$$y_{22}^{(a1)}(p) = p + b_1 - \epsilon_1 - \xi_0 \xi_{11} , \quad (182a)$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) \equiv y_{12}^{(a)}(p) = K_1(a_1 p + a_0) \quad (182b)$$

und

$$z_{11}^{(bl)}(p) = \frac{P_2(-\epsilon_1)}{\epsilon_0^2 \epsilon_{12} \epsilon_{21} (p + \epsilon_1) - \epsilon_0 \epsilon_{22} P_2(-\epsilon_1)} , \quad (183a)$$

$$z_{12}^{(bl)}(p) = \frac{K_2 \epsilon_0^2 \epsilon_{12} \epsilon_{21}}{\epsilon_0^2 \epsilon_{12} \epsilon_{21} (p + \epsilon_1) - \epsilon_0 \epsilon_{22} P_2(-\epsilon_1)} . \quad (183b)$$

Prüft man die Fialkow-Gerst-Bedingungen bei den obigen Matrixelementen der RC-Zweitore, so erhält man Beziehungen für die obere Grenze der Konstante K_1 bzw. K_2 . Für K_1 kommen gemäß den Gln. (182a,b) folgende Funktionen als obere Grenzen in Frage

$$K'_{M1} = \frac{1}{a_1} , \quad (184a)$$

$$K'_{M2} = \frac{b_1 - \epsilon_1 - \epsilon_0 \epsilon_{11}}{a_0} \quad (184b)$$

und für die Konstante K_2 gemäß den Gln. (183a,b)

$$K''_{M1} = \frac{P_2(-\epsilon_1)}{\epsilon_0^2 \epsilon_{12} \epsilon_{21}} . \quad (185)$$

Es ist zu erkennen, daß der maximale Wert der Übertragungskonstante K wieder für den kleinstmöglichen ϵ_0 -Wert erreicht wird. Dieser ist durch das nicht-negative Absolutglied im Nenner von Gl. (183a). festgelegt:

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon_{22} P_2(-\epsilon_1)}{\epsilon_{12} \epsilon_{21} \epsilon_1} . \quad (186)$$

Man erhält für K'_{M2} Gl. (184b) unter Berücksichtigung von ϵ_0 Gl. (186)

$$K'_{M2} = \frac{b_0 - p_2(-\delta_1) / (1 - 1/4Q_G^2)}{\delta_1 a_0} . \quad (187)$$

Der Gültigkeitsbereich von K'_{M1} bzw. K'_{M2} folgt aus

$$K_1 \leq \text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}] .$$

Die beiden in der eckigen Klammer stehenden Funktionen sind im Bild 31 skizziert.

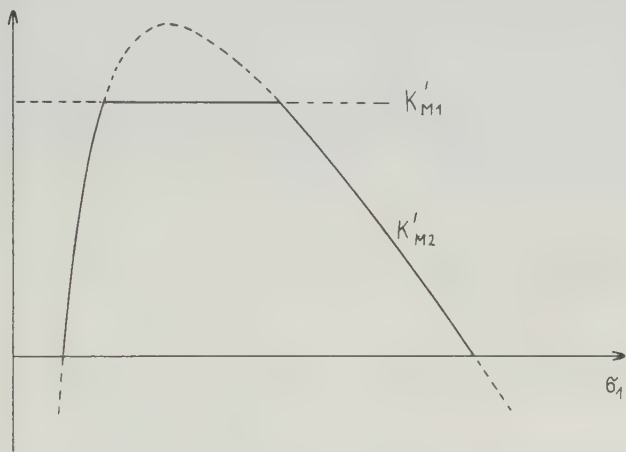


Bild 31: Darstellung der Funktion $\text{Min} [K'_{M1}, K'_{M2}]$ für den Fall $a_2 = 0$

Es entstehen für $a_1 > 0$ maximal drei interessierende δ_1 -Intervalle, jedoch nur ein Intervall, falls $a_1 = 0$ gilt ($K'_{M1} = \infty$). Die Grenzen dieser Intervalle folgen unter der Voraussetzung $a_1 > 0$ aus $K'_{M1} = K'_{M2}$ als reelle Nullstellen der Gleichung

$$\zeta_1^2 - \zeta_1 \left[b_1 - \frac{a_0}{a_1} \left(1 - \frac{1}{4Q_G^2} \right) \right] + \frac{b_0}{4Q_G^2} = 0 .$$

Im mittleren ζ_1 -Intervall ($a_1 > 0$) gilt gemäß Gl. (181a) für die maximale Übertragungskonstante

$$K_M = K'_{M1} K''_{M1} g_0 g_{21} a_1$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (186) mit den Gln. (184a) und (185)

$$K_M = \frac{g_{21} \zeta_1}{g_{22}} . \quad (188)$$

Für das obere und das untere ζ_1 -Intervall folgt schließlich gemäß den Gln. (181a,b) mit $a_1 \geq 0$

$$K_M = K'_{M2} K''_{M1} g_0 g_{21} \cdot \begin{cases} a_1 & \text{für } a_1 > 0 \\ a_0 & \text{für } a_1 = 0 \end{cases}$$

oder mit den Gln. (185) und (187)

$$K_M = \frac{g_{21}}{g_{22} a_0} \left[b_0 - P_2(-\zeta_1) \frac{4Q_G^2}{4Q_G^2 - 1} \right] \cdot \begin{cases} a_1 & \text{für } a_1 > 0 \\ a_0 & \text{für } a_1 = 0 \end{cases} . \quad (189)$$

Das Maximum wird offensichtlich für $\zeta_1 = b_1/2$ erreicht. Es hat den Wert

$$K_M\left(\frac{b_1}{2}\right) = \frac{g_{21} b_1^2}{g_{22} a_0^4 (1 - 1/4Q_G^2)} \left(1 - \frac{Q_P^2}{Q_G^2} \right) \cdot \begin{cases} a_1 & \text{für } a_1 > 0 \\ a_0 & \text{für } a_1 = 0 \end{cases} . \quad (190)$$

Liegt die Stelle des relativen Maximums $\xi_1 = b_1/2$ im mittleren ξ_1 -Intervall, so ist das absolute Maximum von K_M durch Gl. (188) für den größten ξ_1 -Wert dieses Intervalls festgelegt (vgl. Bild 32).

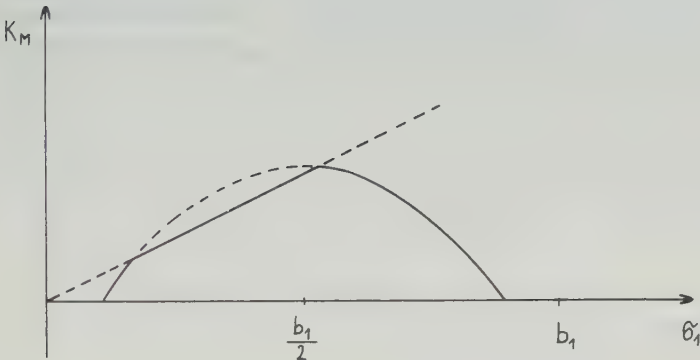


Bild 32: Darstellung der Funktion $K_M(\xi_1)$ für den Fall $a_2 = 0$

In allen anderen Fällen gilt Gl. (190) für den größtmöglichen Wert der Übertragungskonstante.

3.4. Die Empfindlichkeit der Übertragungspole bezüglich der Parameter des Gytrators

Zur Polempfindlichkeit bezüglich Änderungen der Parameter g_{12} und g_{21} sind allgemeine Aussagen möglich, die nicht nur für Übertragungsfunktionen zweiten Grades gelten. Nach den Gln. (117), (118) und (119) lautet der Nenner der analysierten Übertragungsfunktion

$$\frac{\tilde{P}_2(p)}{Q(p)} = \left[Z_2(p) - Z_0(p) \right] + \frac{\tilde{g}_{12}\tilde{g}_{21}}{g_{12}g_{21}} \left[Z_1(p) + Z_0(p) \right].$$

Dabei sind $\tilde{g}_{12}$, $\tilde{g}_{21}$ als die veränderlichen Größen und g_{12} , g_{21} als ihre Sollwerte anzusehen. Eine entsprechende Bedeutung hat das Polynom $\tilde{P}_2(p)$, das für $\tilde{g}_{12} = g_{12}$ und $\tilde{g}_{21} = g_{21}$ mit $P_2(p)$ übereinstimmt. Die Empfindlichkeit der Nullstellen von $P_2(p)$ wird gemäß den Aussagen in Teil I, Abschnitt 3.1 sicher minimal, falls die auf der rechten Seite der obigen Gleichung stehende RC-RL-Zerlegung mit einer Calahanschen übereinstimmt oder sie hinreichend genau annähert. Es muß durch geeignete Wahl der freien Parameter dafür gesorgt werden, daß

$$Z_1(p) + Z_0(p) \rightarrow B_0 \frac{\frac{1}{\prod_1^n (p + \beta_1)}}{\frac{1}{\prod_1^m (p + \alpha_1)}} \quad (191a)$$

und

$$Z_2(p) - Z_0(p) \rightarrow A_0 \frac{\frac{1}{\prod_1^m (p + \alpha_1)}}{\frac{1}{\prod_1^n (p + \beta_1)}} \quad (191b)$$

streben. Den Gln. (17), (19) und (20) entnimmt man jedoch

$$Z_1(p) = \frac{\frac{1}{\prod_1^n (p + \varrho_v)}}{\frac{1}{\prod_1^n (p + \gamma_v)}} B_0 \frac{\frac{1}{\prod_1^n (p + \beta_1)}}{\frac{1}{\prod_1^m (p + \alpha_1)}} + \sum_1^n \frac{\tau_v}{p + \gamma_v}$$

und

$$Z_2(p) = \frac{\frac{1}{\prod_1^n (p + \varrho_v)}}{\frac{1}{\prod_1^n (p + \gamma_v)}} A_0 \frac{\frac{1}{\prod_1^m (p + \alpha_1)}}{\frac{1}{\prod_1^n (p + \beta_1)}} - \sum_1^n \frac{\tau_v}{p + \gamma_v} \quad .$$

Dabei werden gemäß Teil I, Abschnitt 3.2 die Entwicklungskoeffizienten τ_v beliebig klein für hinreichend kleine Abstände $|\xi_v - \tau_v|$. Wie man leicht erkennt, sind zu einer beliebig genauen Realisierung der Beziehungen (191a) und (191b) zwei Voraussetzungen erforderlich. Erstens müssen die bereits erwähnten Abstände $|\xi_v - \tau_v| > 0$ möglichst klein gemacht werden, und zweitens muß $Z_0(p) \rightarrow 0$ streben, was durch hinreichend kleine Wahl der Entwicklungskoeffizienten ξ_0 und ξ_1 möglich ist. Dabei besteht allerdings die Gefahr, daß auch die Übertragungskonstante K des Gesamtzweiters gegen Null strebt.

Falls die Pole der Übertragungsfunktion ausschließlich komplex sind, und gemäß Abschnitt 2.1 $Z_0(p) \equiv 0$ gewählt werden kann, ist die Calahan-Zerlegung exakt realisierbar, und man erhält den minimalen Betrag der Polempfindlichkeit.

Für Übertragungsfunktionen zweiten Grades werden im weiteren noch einige Formeln angegeben. Zur Bestimmung der Polempfindlichkeit bezüglich der Parameter g_{12} und g_{21} wählt man folgende Darstellung des Nenners der analysierten Übertragungsfunktion

$$\tilde{P}_2(p) = P_2(p) - P_2(-\xi_1) - \xi_0(p + \xi_1) - \xi_1 + \frac{\tilde{g}_{12}\tilde{g}_{21}}{g_{12}g_{21}} [\xi_0(p + \xi_1) + P_2(-\xi_1) + \xi_1].$$

Daraus folgt für die Empfindlichkeit der Pole bezüglich jedes der beiden Parameter dem Betrage nach

$$\left| \frac{p_i}{S_{g_{12}}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[\xi_1^2 - (b_1 - \xi_0)\xi_1 + b_0 + \xi_1 - \xi_0 b_1/2]^2 + \xi_0^2(b_0 - b_1^2/4)}{b_0(b_0 - b_1^2/4)}}. \quad (192)$$

Das Minimum wird für $\xi_{1m} = \frac{b_1 - \xi_0}{2}$ erreicht.

Es hat den Wert

$$\text{Min} \left| \frac{p_i}{S_{g_{12}}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(b_0 - \frac{b_1^2}{4} - \frac{\xi_0^2}{4} + \xi_1)^2 + \xi_0^2(b_0 - b_1^2/4)}{b_0(b_0 - b_1^2/4)}}. \quad (193)$$

Es besitzt für $\xi_1 \rightarrow 0$, $\xi_0 \rightarrow 0$ und damit $\zeta_{1m} \approx \frac{b_1}{2}$ den kleinsten Wert, wodurch die obigen Aussagen bestätigt werden.

Zur Berechnung der Empfindlichkeit bezüglich Änderungen des Parameters g_{11} geht man von der Darstellung

$$\tilde{P}_2(p) = P_2(p) - g_0 g_{11}(p + \zeta_1) + \tilde{g}_{11} g_0(p + \zeta_1)$$

des analysierten Nennerpolynoms von $H(p)$ aus. Es ergibt sich nach Gl. (111) folgender Betrag der Polempfindlichkeit:

$$\left| \frac{p_i}{s_{g_{11}}} \right| = \frac{g_{11} g_0}{2} \sqrt{\frac{P_2(-\zeta_1)}{b_0(b_0 - b_1^2/4)}}.$$

Die Polempfindlichkeit bezüglich Änderungen des Parameters g_{22} ist nicht mehr so einfach formulierbar. Hier kommt zum Vorschein, daß der Grad des Nennerpolynoms algebraisch gleich Drei ist und nur für bestimmte Schaltelementewerte eine Reduktion auf den Grad Zwei eintritt. Der Vollständigkeit halber sei die Formel für die komplexen Pole angegeben:

$$\left| \frac{p_i}{s_{g_{22}}} \right| = \frac{g_{22} \left| [p_1 + b_1 - \zeta_1 - \xi_0 - \xi_1/(p_1 + \zeta_1)] [\xi_0(p_1 + \zeta_1) + \xi_1 + P_2(-\zeta_1)] \right|}{2 g_{12} g_{21} g_0 \sqrt{b_0(b_0 - b_1^2/4)}}.$$

3.5. Zwei Beispiele zur Realisierung von Übertragungsfunktionen zweiten Grades

Beispiel 5

Es werde eine Realisierung der Übertragungsfunktion

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = K \frac{p^2 + 5,97266 p + 658,783}{p^2 + 2,77082 p + 370,703}$$

mit Hilfe eines nicht-idealen Gytrators der Güte $Q_G \approx 100$ (vgl. Beispiel 4) gewünscht. Die Übertragungsnullstellen sind komplex und liegen in der linken p-Halbebene. Die Polgüte von $H(p)$ hat den Wert $Q_P = 3,224$. Somit ist wegen $Q_G > Q_P$ eine Realisierung mit Verlustberücksichtigung möglich.

Die Verwirklichung soll nach Abschnitt 3.3.1 so erfolgen, daß die Übertragungskonstante maximal wird. Im ersten Schritt des Syntheseprozesses ist zu prüfen, ob Ungleichung (151) mit dem Größerzeichen erfüllt wird. Aus Gl. (153) entnimmt man nach Einsetzen der gegebenen Daten und mit der Wahl $\xi_1 = 0,1$

$$\varepsilon \zeta_1 |_{\text{Max}} = 0,906176.$$

Da $a_0/a_2 = 658,783$ gilt, folgt sofort

$$\varepsilon \zeta_1 |_{\text{Max}} < \frac{a_0}{a_2},$$

so daß Abschnitt 3.3.1 zufolge ein relatives Maximum von K_M bei zulässigen Parameterwerten existieren muß. Die Gl. (148) liefert den Parameter ξ_0 für die Maximumstelle

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \varepsilon \zeta_1 |_{\text{Max}} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{4Q_P^2} - \frac{\xi_1}{b_0}\right) \left(1 - \frac{1}{4Q_G^2}\right)} \\ &= 0,652470. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gl. (145) kann noch die Größe g_0 berechnet werden. Man erhält

$$g_0 = 1,33458.$$

Das Maximum der Übertragungskonstante folgt aus Gl. (149)

$$\text{Max } K_M = \frac{g_{21}}{g_{22} a_o b_o} (\epsilon_1 \epsilon)^2 \Big|_{\text{Max}}$$

$$= 0,000672491 .$$

Da alle variablen Parameter nun festgelegt sind, können aus den Gln. (133a,b) und (134a,b) die Matrixelemente der RC-Zweitore berechnet werden:

$$y_{22}^{(a1)}(p) = \frac{p^2 + 2,11168 p + 0,906176}{p + 1,38541} , \quad (194a)$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = \frac{K_1 (p^2 + 5,97266 p + 658,783)}{p + 1,38541} \quad (194b)$$

und

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{0,652470 p + 369,788}{1,77675 p} , \quad (195a)$$

$$z_{12}^{(b1)}(p) = \frac{K_2 1,78110(p + 1,38541)}{1,77675 p} . \quad (195b)$$

Die Fialkow-Gerst-Bedingungen ergeben als maximale Übertragungskonstanten der RC-Zweitore

$$K_1 = 0,00137553$$

und

$$K_2 = 0,366329 .$$

Damit kann zur Kontrolle noch einmal die Übertragungskonstante des Gesamtzweitores berechnet werden:

$$K = K_1 K_2 g_o g_{21} = 0,000672491 .$$

Wegen $g_{11} = g_{22} = 0,005$ erhält man weiterhin die Verlustleitwerte des Gytrators

$$g_0 g_{11} = g_0 g_{22} = 0,00667290 .$$

Der Betrag der Polempfindlichkeit ergibt sich aus Gl. (192). Man berechnet

$$\left| \frac{P_{1/2}}{S_{g_{12}}} \right| = 0,499127 .$$

Die in den Bildern 33 und 34 dargestellten Netzwerke sind Realisierungen der Matrixelemente Gln. (194a,b) bzw. (195a,b).

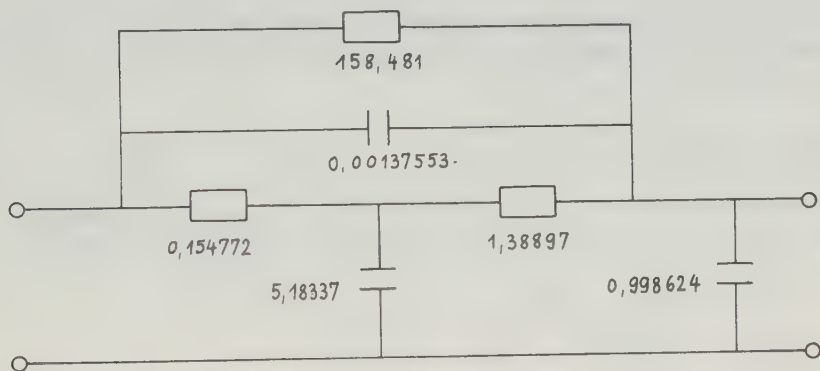


Bild 33: Realisierung von Zweitor al

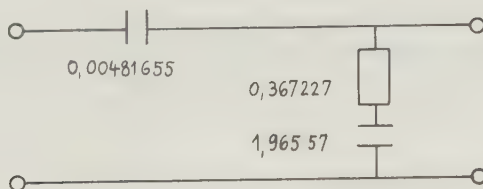


Bild 34: Realisierung von Zweitor bl

Diese Realisierung wurde nach einer geeigneten Entnormierung praktisch aufgebaut und gemessen. Die Ergebnisse sind in Anhang B zusammengestellt.

Beispiel 6

Es werde die Realisierung der Spannungsübertragungsfunktion

$$\frac{U_2}{U_1} = H(p) = K \frac{1}{p^2 + 7,93953 p + 21,1178}$$

mit Hilfe eines nicht-idealen Gytrators der Güte $Q_G \approx 100$ (vgl. Beispiel 4) gewünscht. Diese Funktion besitzt keine endlichen Nullstellen. Die Polgüte hat den Wert $Q_p = 0,5788$, so daß auch hier eine Berücksichtigung der Gytratorverluste möglich ist. Die Realisierung soll nach Abschnitt 3.3.2, Fall b so erfolgen, daß die Übertragungskonstante maximal wird.

Im vorliegenden Fall ist die Bestimmung des freien Parameters ϵ_1 sehr einfach. Die Größe K_M Gl. (189) erhält ihr Maximum für $\epsilon_1 = b_1/2$. Für diesen Wert wird gleichzeitig die Polstellenempfindlichkeit gemäß Abschnitt 3.4 minimal. Aus Gl. (190) erhält man die maximale Übertragungskonstante

$$\text{Max } K_M = 3151,78$$

und aus Gl. (186)

$$e_0 = 0,00674955 .$$

Die Gln. (182a,b) liefern mit den nunmehr bekannten Parameterwerten die Matrixelemente von RC-Zweiter a_1

$$y_{22}^{(a1)}(p) = p + 3,96973 ,$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = K_1 a_0 = 3,96973 ,$$

und die Gln. (183a,b) die Matrixelemente von Zweitor b1

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{117630}{p}$$

$$z_{12}^{(b1)}(p) = \frac{K_2}{p} = \frac{117630}{p} \quad .$$

Die Übertragungskonstante des Gesamtzweiters wird somit

$$K = K_1 K_2 g_0 g_{21} a_0$$

$$= 3151,78 \quad .$$

Das im Bild 35 dargestellte Gesamtnetzwerk zeigt, daß die Eingangs-impedanz sehr klein wird, d.h. eine starke Belastung für die Spannungsquelle bedeutet.

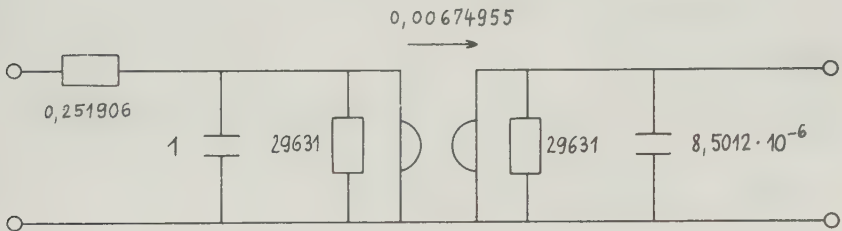


Bild 35: Gesamtnetzwerk zu Beispiel 6

Dieser Effekt ist durch die große Übertragungskonstante zu erklären. Für den praktischen Fall ist daher eine Abweichung von der Lösung mit maximalem K erforderlich. Man vergrößert hierzu zweckmäßigerweise den Wert von g_0 .

Wählt man $g_0 = 1$, so erhält man mit $g_1 = b_1/2$ aus den Gln. (182a,b) und (183a,b) als Matrixelemente der Restzweitore

$$y_{22}^{(a1)}(p) = p + 3,96476,$$

$$-y_{12}^{(a1)}(p) = K_1 a_0 = 3,96476$$

und

$$z_{11}^{(b1)}(p) = \frac{5,35882}{p + 3,94297},$$

$$z_{12}^{(b1)}(p) = \frac{K_2}{p + 3,94297},$$

woraus sich als Maximalwert für die unbestimmten Konstanten die Werte

$$K_1 = 3,96476, \quad K_2 = 5,35882$$

und die Übertragungskonstante des Gesamtzweiters

$$K = K_1 K_2 g_0 g_{21} a_0 = 21,2464$$

ergeben.

Gemäß Gl. (192) mit $\xi_0 = \xi_1 = 0$ hat die Polempfindlichkeit den Betrag

$$\left| \begin{matrix} p_1 \\ s_{g_{12}} \end{matrix} \right| = 0,251872.$$

Die Realisierung der obenstehenden Matricelemente führt zu dem im Bild 36 dargestellten Gesamtnetzwerk.

Auch dieses Netzwerk wurde praktisch aufgebaut und gemessen. Die Ergebnisse sind im Anhang B zusammengestellt.

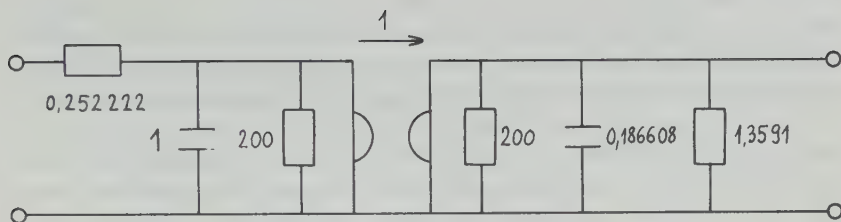


Bild 36: Gesamtnetzwerk zu Beispiel 6 mit kleinerer Übertragungskonstante

Schlußbemerkungen

Durch die vorliegende Arbeit ist es gelungen, unter Zugrundelegung einer von Holmes angegebenen und von ihm nur für spezielle Übertragungsfunktionen zweiten Grades angewendeten Netzwerkstruktur [7], die zwei RC-Zweitoren und einen Gyrator enthält, ein allgemeines Syntheseverfahren für Übertragungsfunktionen beliebigen Grades zu entwickeln. Dabei konnten nicht-ideale Gyratoren zugelassen und genaue Grenzen für die Realisierbarkeit in Abhängigkeit von den Polen der Übertragungsfunktion und der Güte des Gyrators angegeben werden. Da es nicht möglich ist, die Übertragungskonstanten der Netzwerke vorzuschreiben und da diese in vielen Fällen verhältnismäßig kleine Werte annehmen, wurde für Funktionen zweiten Grades bei Verwendung von Hilfspolynomen ersten Grades eine Optimierung unter Berücksichtigung der Gyratorverlustleitwerte durchgeführt. Einige Betrachtungen zu den Pol- und Nullstellenempfindlichkeiten bezüglich der Parameter des aktiven Elements ergänzen diese Untersuchungen und sollen eine sinnvolle Wahl der freien Parameter ermöglichen.

In einem weiteren Teil der Arbeit wurde eine erstmals von Horowitz im Jahre 1957 verwendete Kettenstruktur mit einem Gyrator und zwei RC-Zweitoren in ähnlicher Weise untersucht. Diese Struktur hat den Vorteil, daß die Nullstellen von den Gyratorparametern unabhängig sind. Es können jedoch in wirtschaftlicher Weise nur Mindestphasenfunktionen realisiert werden. Die Berücksichtigung der Gyratorverluste führte zu Ergebnissen, die mit denen der Holmesschen Struktur weitgehend übereinstimmen. Auch hier erschien die Optimierung der Übertragungskonstante für Übertragungsfunktionen zweiten Grades bei Verwendung von Hilfspolynomen ersten Grades zweckmäßig. Wie dort konnten hierzu genaue Vorschriften für den Synthesevorgang gegeben werden.

Die Begrenzung der Übertragungskonstante wird dadurch erzwungen, daß die passiven Teilzweitoren keine Übertrager enthalten sollen. Daher müssen diese notwendig die Fialkow-Gerst-Bedingungen erfüllen [vgl. Teil I, Abschnitt 1]. Ist q der Grad der Übertragungsfunktion, so erhält man für jedes Zweitor maximal $(q + 1)$ Bedingungen, welche

Funktionen mehrerer in Grenzen variabler Parameter darstellen, z.B. der Nullstellen des Hilfspolynoms $Q(p)$. Es ist einzusehen, daß bei höheren Funktionsgraden geschlossene Lösungen für die Optimierung der Übertragungskonstante in der Regel nicht mehr möglich sind. In diesen Fällen muß man zu numerischen Verfahren übergehen.

Interessante Ergebnisse in dieser Hinsicht könnten vermutlich noch durch die genaue Untersuchung von Realisierungen zweiten Grades gewonnen werden, die sich bei der Verwendung von Hilfspolynomen ebenfalls zweiten Grades ergeben. Einige spezielle Vergleiche deuten jedoch darauf hin, daß keine oder nur unwesentliche Gewinne bezüglich der Größe der Übertragungskonstante möglich sind.

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- [1] I.M. Horowitz: Synthesis of Active RC Transfer Functions by means of Cascaded RC and RL Structures. IRE Natl. Convention Record, 5 (Part 2) [1957] , S. 190 - 195.
- [2] I.M. Horowitz: Optimum Design of Single-Stage Gyrator-RC Filters. IRE Trans. C.T. 8 [1961] , S. 88 - 94.
- [3] N. Balabanian: Active Network Synthesis with a Nonideal Device. J. Franklin Inst. 279 [1965] , S. 334 - 346.
- [4] D.A. Calahan: Sensitivity Minimization in Active RC Synthesis. IRE Trans. C.T. 9 [1962] , S. 38 - 42.
- [5] W.J. Howard: Transfer Function Synthesis Using Non-Ideal Gyrtors. Elec. Engg. Res. Lab., Cornell Univ., Ithaka, Tech. Rep. 87 [1965] .
- [6] R. Unbehauen: Synthese elektrischer Netzwerke. R. Oldenburg Verlag, München Wien 1972 .
- [7] W.H. Holmes: A New Method of Gyrator-RC Filter Synthesis. Proc. IEEE 54 [1966] , S. 1459 - 1460.
- [8] W. Hohneker: Dissertation (in Vorbereitung). Universität Erlangen-Nürnberg.
- [9] H.J. Orchard: Inductorless Filters. Electron. Letters 2 [1966] , S. 224 - 225.
- [10] D.A. Calahan: Restrictions on the Natural Frequencies of an RC-RL Network. J. Franklin Inst. 272 [1961] , S. 112 - 133.
- [11] L. Bieberbach: Einführung in die Funktionentheorie. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1966.
- [12] B.D.H. Tellegen: The Gyrator, a New Electric Network Element. Philips Res. Rept. 3 [1948] , S. 81 - 101.
- [13] R. Unbehauen: Elektrische Netzwerke. Eine Einführung in die Analyse. Springer Verlag, Berlin 1972.
- [14] S.K. Mitra: Analysis and Synthesis of Linear Active Networks. J. Wiley, New York 1969.
- [15] R. Unbehauen und A. Mayer: Über die Synthese von Übertragungsfunktionen in Form von RC-Gyrator-Kettenschaltungen. Arch. Elektr. Übertr. 22 [1968] , S. 61 - 65.
- [16] R. Unbehauen und A. Mayer: Zur Synthese von RC-Gyrator-Vierpolen. Frequenz 22 [1968] , S. 211 - 214.

Anhang A

Zunächst wird gezeigt, wie jede beliebige RC-RL-Zerlegung eines nur konjugiert komplexe Nullstellenpaare enthaltenden Polynoms $P_2(p)$ aus der "optimalen" Calahanschen Zerlegung hervorgeht. Diese lautet gemäß Teil I, Abschnitt 3.1

$$\frac{P_2(p)}{\tilde{Q}_1(p)\tilde{Q}_2(p)} = B_0 \frac{\tilde{Q}_2(p)}{\tilde{Q}_1(p)} + \frac{\tilde{Q}_1(p)}{\tilde{Q}_2(p)}$$

$$\text{mit } \tilde{Q}_1(p) = \prod_1^m (p + \alpha_1) \text{ und } \tilde{Q}_2(p) = \prod_1^{m-1} (p + \beta_1) .$$

Nimmt man an, daß eine RC-RL-Zerlegung von $P_2(p)/Q(p)$ mit

$$Q(p) = \prod_1^{m+1} (p + \zeta_v) \quad (l=m, m-1) \text{ existiert, so muß sie durch die Beziehung}$$

$$\frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{\tilde{Q}_1(p)\tilde{Q}_2(p)}{Q(p)} \left[B_0 \frac{\tilde{Q}_2(p)}{\tilde{Q}_1(p)} + \frac{\tilde{Q}_1(p)}{\tilde{Q}_2(p)} \right] \quad (\text{I})$$

$$= B_0 \frac{\tilde{Q}_1^2(p)}{Q(p)} + \frac{\tilde{Q}_2^2(p)}{Q(p)}$$

$$= \tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p) \quad (\text{II})$$

$$[\tilde{Z}_1(\infty) = 0]$$

bis auf eine additive Funktion $Z(p)$ gegeben sein. Die Entwicklungskoeffizienten in den Polen $-\zeta_v$ von $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ besitzen für ein bestimmtes v dasselbe Vorzeichen und alternieren mit ansteigenden Werten von ζ_v .

Bildet man eine RC-Impedanz $Z(p)$ dadurch, daß man die Partialbrüche von $\tilde{Z}_1(p)$ mit negativen Entwicklungskoeffizienten von den Partialbrüchen von $\tilde{Z}_2(p)$ mit positiven Entwicklungskoeffizienten abzieht und noch eine nicht-negative Konstante $Z(\infty) \geq 0$ addiert, so folgen als gesuchte Summanden der Zerlegung

$$Z_1(p) = \tilde{Z}_1(p) + Z(p) \quad (\text{III})$$

und

$$Z_2(p) = \tilde{Z}_2(p) - Z(p) . \quad (\text{IV})$$

Dabei besitzen die Funktionen $Z_1(p)$ und $Z_2(p)$ keine gemeinsamen Pole. Mit der Bezeichnung

$$M = \frac{\tilde{Q}_1(0)\tilde{Q}_2(0)}{Q(0)} > 0 \quad (\text{V})$$

erhält man folgende Beziehung für die Funktionswerte im Punkt $p=0$:

$$Z_1(0) = MB_0 \frac{\tilde{Q}_2(0)}{\tilde{Q}_1(0)} + Z(0) \quad (\text{VI})$$

und

$$Z_2(0) = M \frac{\tilde{Q}_1(0)}{\tilde{Q}_2(0)} - Z(0) , \quad (\text{VII})$$

wobei $Z(0) \geq 0$ gelten muß.

Wenn die Funktion $Z(p)$ [unter der Voraussetzung $Z(\infty) = 0$] verschwinden soll, so darf $\tilde{Z}_1(p)$ nur positive Entwicklungskoeffizienten und $\tilde{Z}_2(p)$ nur negative Entwicklungskoeffizienten in den Polen $-\zeta_i$ besitzen. Da die Entwicklungskoeffizienten für ein bestimmtes ν jedoch in beiden Fällen dasselbe Vorzeichen haben, muß immer einer der beiden gleich Null werden. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Nullstellen von $Q(p)$ entweder in $\tilde{Q}_1(p)$ oder in $\tilde{Q}_2(p)$ enthalten sind, woraus für das gewünschte Ergebnis notwendig

$Q(p) = \tilde{Q}_1(p)\tilde{Q}_2(p)$ gefordert werden muß. Nur die "optimale" Calahan-Zerlegung liefert also $Z(p) \neq 0$.

Weist das Polynom $P_2(p)$ auch reelle Nullstellen ζ_ν ($\nu=1,2,\dots,n$) auf, so wird die Darstellung des alle komplexe Nullstellen enthaltenden Faktors von $P_2(p)$ gemäß Gl. (I) ergänzt. Setzt man wieder die Existenz einer RC-RL-Zerlegung von $P_2(p)/Q(p)$ voraus, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{P_2(p)}{Q(p)} &= \frac{\prod_1^n (p + \zeta_\nu) \tilde{Q}_1(p) \tilde{Q}_2(p)}{Q(p)} \left[B_0 \frac{\tilde{Q}_2(p)}{\tilde{Q}_1(p)} + \frac{\tilde{Q}_1(p)}{\tilde{Q}_2(p)} \right] \\ &= B_0 \frac{\prod_1^n (p + \zeta_\nu) \tilde{Q}_2^2(p)}{Q(p)} + \frac{\prod_1^n (p + \zeta_\nu) \tilde{Q}_1^2(p)}{Q(p)} \\ &= \tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p) . \end{aligned}$$

Es ist einzusehen, daß auch hier die Entwicklungskoeffizienten in den Polen $-\zeta_\nu$ von $\tilde{Z}_1(p)$ und $\tilde{Z}_2(p)$ für ein bestimmtes ν dasselbe Vorzeichen besitzen müssen, so daß wieder eine RC-Impedanz $Z(p)$ in der oben geschilderten Weise gebildet werden kann. Damit ergeben sich die gesuchten Summanden der Zerlegung wieder aus den Gln. (III) bzw. (IV). Mit der Bezeichnung

$$M = \frac{\prod_1^n \zeta_\nu \tilde{Q}_1(0) \tilde{Q}_2(0)}{Q(0)} > 0 \quad (\text{VIII})$$

gelten für die Funktionswerte in $p = 0$ ebenfalls die Beziehungen (VI) und (VII).

Dabei ist folgendes bemerkenswert: Man kann nur durch die Wahl des Hilfspolynoms $Q(p)$ in der im Teil I, Abschnitt 3.2 beschriebenen

Weise mit hinreichend kleinen Abständen $|\zeta_v - \tau_v|$ ($v = 1, 2, \dots, n$) die Entwicklungskoeffizienten der Funktion $Z(p)$ und damit $Z(0)$ beliebig klein machen. Wenn nämlich $Z(p)$ [unter der Voraussetzung $Z(\infty) = 0$] verschwinden soll, so darf auch hier die Funktion $\tilde{Z}_1(p)$ in ihren Polen nur positive, die Funktion $\tilde{Z}_2(p)$ nur negative Entwicklungskoeffizienten besitzen. Da die Entwicklungskoeffizienten in den Polen $-\zeta_v$ bei beiden Funktionen für ein bestimmtes v das gleiche Vorzeichen aufweisen, muß jeweils einer der beiden Entwicklungskoeffizienten Null werden. Für $(2m-1)$ Pole erreicht man dies genau durch die Wahl

$$Q(p) = \prod_{v=1}^n (p + \tau_v) \tilde{Q}_1(p) \tilde{Q}_2(p),$$

für die Pole $-\tau_v$ müßte $\tau_v = \zeta_v$ gelten, was jedoch nicht zulässig ist. Läßt man aber die Abstände $|\zeta_v - \tau_v|$ immer kleiner werden, so streben auch die Entwicklungskoeffizienten von $Z(p)$ in den Polen $-\tau_v$ gegen Null.

Anhang B

Die in den Beispielen 4, 5 und 6 berechneten Netzwerke wurden aufgebaut und gemessen. Der zur Verfügung stehende Gyrator hatte eine Güte von $Q_G > 100$ und einen Gyrationswiderstand von ca. 1000Ω . Es wurde mit der Frequenz $f_0 = 10^3/2\pi$ Hz entnormiert.

Die Schaltelemente wurden so ausgesucht, daß ihre Abweichungen von den Sollwerten weniger als ein Prozent betrug. An sämtlichen Schaltungen wurden selektive Messungen des Amplitudenfaktors durchgeführt. Wie zu erwarten war, traten im Beispiel 6 die geringsten Differenzen zu der Sollkurve auf. Bei diesem Beispiel befinden sich beide Nullstellen im Unendlichen, und die Pole liegen nicht in der Nähe der $j\omega$ -Achse (wegen der geringen Polgüte), so daß Änderungen der Pollagen infolge von Schaltelementetoleranzen nicht wesentlich auf den Frequenzgang eingehen.

In den Bildern 37, 38 und 39 sind die Meßkurven der Amplitudenfaktoren zu den Beispielen 4, 5 bzw. 6 dargestellt. Die Sollwerte sind für einige Frequenzpunkte durch Kreuze angedeutet.

Bild 37 :
Beispiel 4, Meßkurve des Amplitudenfaktors
x Sollwerte

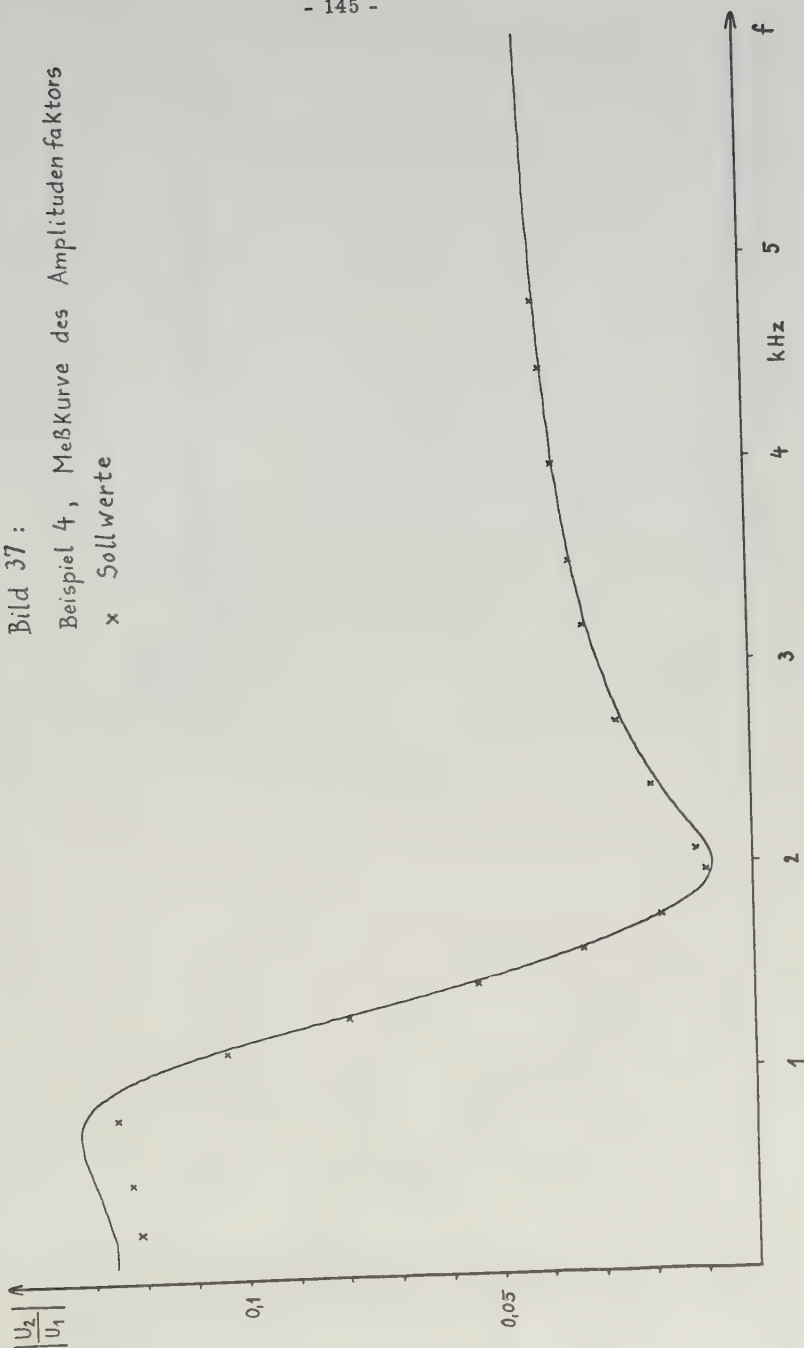


Bild 38:

Beispiel 5, Meßkurve des Amplitudenfaktors

x Sollwerte

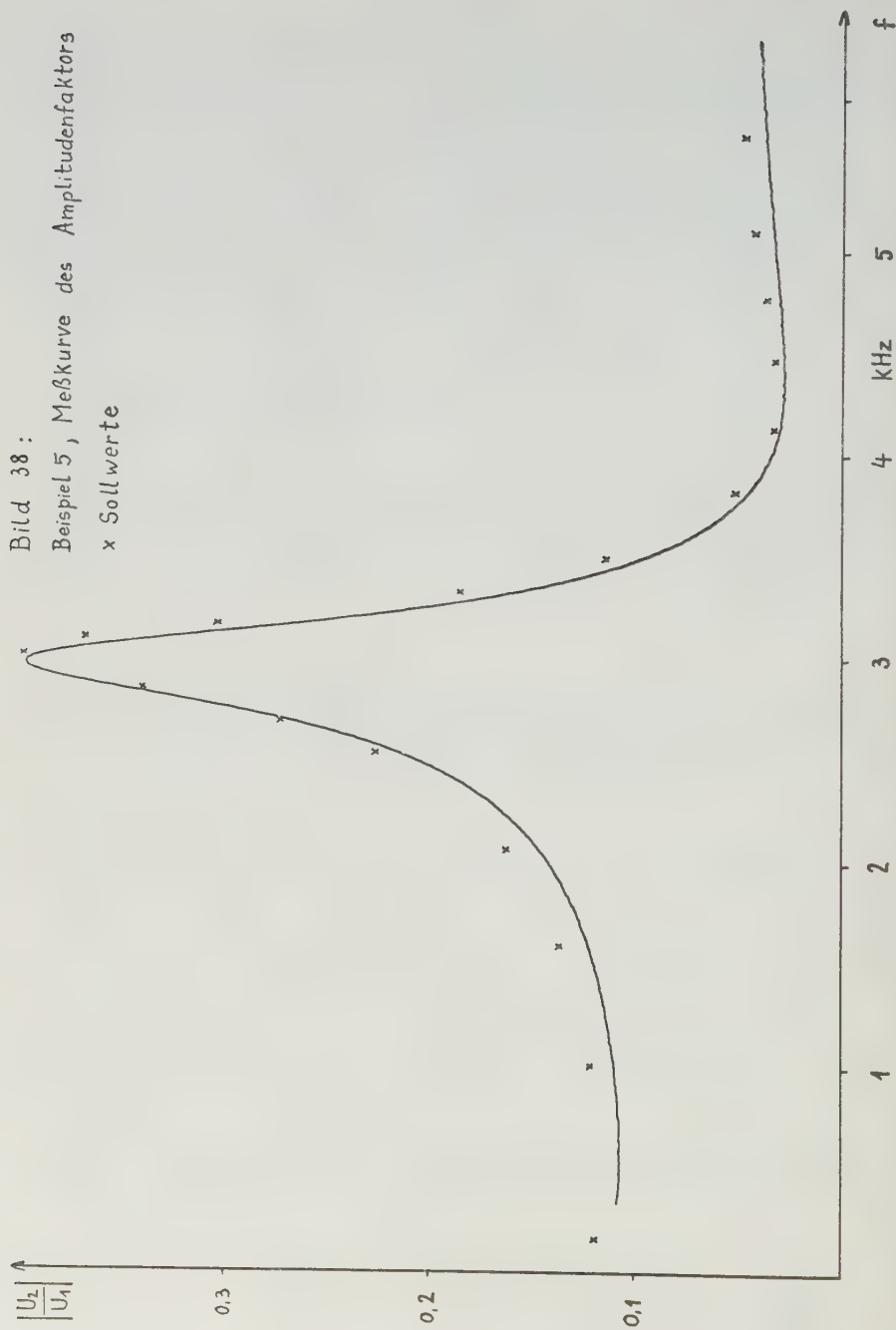
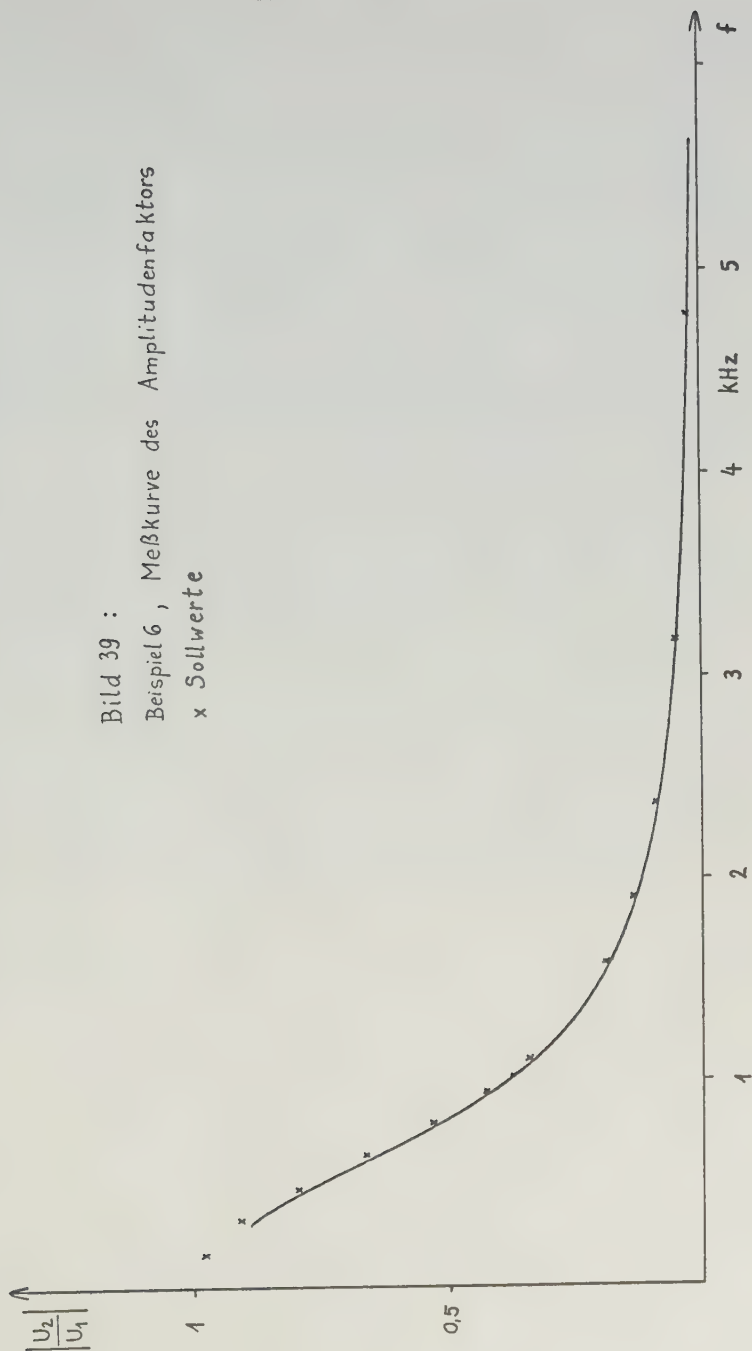


Bild 39 :
Beispiel 6 , Meßkurve des Amplitudenfaktors
x Sollwerte



Lebenslauf

Am 18. Juni 1938 wurde ich als erster Sohn des Hausmeisters Albert Mayer und seiner Ehefrau Anna in Stuttgart geboren. Nach Kriegsende besuchte ich dort vier Jahre lang die Volksschule und weitere neun Jahre lang das Dillmann-Realgymnasium, an dem ich 1957 die Reifeprüfung bestand. Nach einer halbjährigen Praktikantenzeit konnte ich im WS 1957/58 an der Technischen Hochschule in Stuttgart das Studium der Elektrotechnik aufnehmen. Diese Fachrichtung entsprach meiner schon zur Schulzeit bestehenden Neigung zu den naturwissenschaftlichen Fächern. Mit dem Erwerb des Diplomzeugnisses im WS 1962/63 war mein Studium abgeschlossen. Nun begann für mich eine vierjährige Tätigkeit als Entwicklungsingenieur im Netzwerkelabor der Firma Standard-Elektrik-Lorenz AG in Stuttgart. Danach nahm ich die Gelegenheit wahr, an die Universität zurückzukehren. Seit April 1967 bin ich als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen-Nürnberg beschäftigt, wo die vorliegende Arbeit entstand.

Erlangen, den 15.5.1973

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990